# Démonstrations exigibles

## Semaine 25 (29 mars 2021)

---

1. *En cas d'existence, unicité du* $DL_n(0)$

   Soient $0 \in \overline{I}$, $f$ définie sur $I$ ou $I \backslash \{0\}$ à valeurs réelles et $n \in \mathbb{N}$.

   Montrer que, si $f$ admet un $DL_n(0)$ alors celui-ci est unique.

   *Preuve :* Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe deux listes de réels $(a_0, \ldots, a_n)$ et $(b_0, \ldots, b_n)$ distinctes telles que :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k x^k + o(x^n) \underset{x \to 0}{=} \sum_{k=0}^{n} b_k x^k + o(x^n).$$

   On a alors : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} (a_k - b_k) x^k \underset{x \to 0}{=} o(x^n)$.

   En notant $p = \min\{k \in [\![0; n]\!] \mid a_k \neq b_k\}$, la relation précédente s'écrit :

$$\sum_{k=p}^{n} (a_k - b_k) x^k \underset{x \to 0}{=} o(x^n) \quad \text{ou encore} \quad (a_p - b_p) x^p \underset{x \to 0}{=} - \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k) x^k + o(x^n).$$

   En divisant par $x^p$ (pour $x \neq 0$), on obtient : $\boxed{a_p - b_p \underset{x \to 0}{=} - \displaystyle\sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-p} + o(x^{n-p})} \quad (\star)$.

   Or pour tout $k \in [\![p+1; n]\!]$ on a $k - p \geq 1$, ainsi $x^{k-p} \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$ et, de plus, $o(x^{n-p}) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0$.

   On en déduit que :

$$- \sum_{k=p+1}^{n} (a_k - b_k) x^{k-p} + o(x^{n-p}) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0.$$

   Grâce à $(\star)$, cela rentre en contradiction avec le fait que $a_p - b_p \neq 0$.

$\square$

2. *Existence de supplémentaires en dimension finie*

Soit $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$ un sous-espace vectoriel de $E$.

Montrer que $F$ possède un supplémentaire $G$ dans $E$, i.e. montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel $G$ de $E$ tel que : $E = F \oplus G$.

*On admettra le théorème de la base incomplète.*

Preuve :

- Si $F = \{0_E\}$ alors $E = \{0_E\} \oplus E$ et $F$ admet $G = E$ pour (unique) supplémentaire.
- Si $F = E$ alors $E = E \oplus \{0_E\}$ et $F$ admet $G = \{0_E\}$ pour (unique) supplémentaire.
- Supposons que $F$ n'est pas un sous-espace vectoriel trivial de $E$.
  - ⋆ On note $n$ la dimension de $E$ et $p$ la dimension de $F$. On a : $0 < p < n$ ($p \geq 1$ et $n \geq 2$).
    Soit $(f_1, \ldots, f_p)$ une base de $F$. C'est une famille libre de $E$ donc, par le théorème de la base incomplète, on sait qu'il existe $(n-p)$ vecteurs $(g_{p+1}, \ldots, g_n)$ tels que $(f_1, \ldots, f_p, g_{p+1}, \ldots, g_n)$ soit une base de $E$.
    On pose $G = \text{Vect}(g_{p+1}, \ldots, g_n)$.
  - ⋆ Montrons que $E = F \oplus G$.

    $\underline{F \cap G = \{0_E\}}$ : En effet

$$x \in F \cap G \Longleftrightarrow \begin{cases} \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^p,\ x = \displaystyle\sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i \\ \exists (\mu_i) \in \mathbb{K}^{n-p},\ x = \displaystyle\sum_{i=p+1}^{n} \mu_i g_i \end{cases}$$
$$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{p} \lambda_i f_i + \sum_{i=p+1}^{n} (-\mu_i) g_i = 0_E$$
$$\Longleftrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_p = \mu_{p+1} = \ldots = \mu_n \quad \text{[car } ((f_1, \ldots, f_p, g_{p+1}, \ldots, g_n) \text{ libre)]}$$
$$\Longleftrightarrow x = 0_E.$$

    $\underline{E = F + G}$ : Soit $x \in E$. Comme $(f_1, \ldots, f_p, g_{p+1}, \ldots, g_n)$ est une famille génératrice de $E$, il existe $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n$ tel que :

$$x = \underbrace{\lambda_1 f_1 + \ldots \lambda_p f_p}_{\in F} + \underbrace{\lambda_{p+1} g_{p+1} + \ldots + \lambda_n g_n}_{\in G}.$$

    Tout élément de $E$ s'écrit bien comme la somme d'un élément de $F$ et d'un élément de $G$.

  Donc $E = F \oplus G$.

$\square$

3. *Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires à l'aide des dimensions*

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et $F$, $G$ deux sous-espaces vectoriels de $E$.

Montrer les équivalences :

$$\underbrace{E = F \oplus G}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}}_{(ii)} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}}_{(iii)}$$

*On admettra que* $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$ *et la formule de Grassmann.*

<u>Preuve :</u>

<u>$(i) \Rightarrow (ii)$ et $(iii)$ :</u> Supposons $\begin{cases} E = F + G \ (\star) \\ F \cap G = \{0_E\} \ (\star\star) \end{cases}$ et montrons que $\dim(E) = \dim(F) + \dim(G)$.

On a :

$$\begin{aligned} \dim(E) &= \dim(F+G) \quad \text{[par } (\star)] \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \quad \text{[par Grassmann]} \\ &= \dim(F) + \dim(G) \quad \text{[par } (\star\star)]. \end{aligned}$$

<u>$(ii) \Rightarrow (i)$ :</u> Supposons $\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \ (\star) \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \ (\star\star) \end{cases}$ et montrons que $E = F + G$.

On a :

$$\begin{aligned} \dim(F+G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F \cap G) \quad \text{[par Grassmann]} \\ &= \dim(F) + \dim(G) \quad \text{[par } (\star)] \\ &= \dim(E) \quad \text{[par } (\star\star)]. \end{aligned}$$

Comme $F + G$ est un sous-espace vectoriel de $E$, on a $E = F + G$.

<u>$(iii) \Rightarrow (i)$ :</u> Supposons $\begin{cases} E = F + G(\star) \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \ (\star\star) \end{cases}$ et montrons que $F \cap G = \{0_E\}$.

On a :

$$\begin{aligned} \dim(F \cap G) &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(F+G) \quad \text{[par Grassmann]} \\ &= \dim(F) + \dim(G) - \dim(E) \quad \text{[par } (\star)] \\ &= 0 \quad \text{[par } (\star\star)]. \end{aligned}$$

Donc $F \cap G = \{0_E\}$.

$\square$

4. *Caractérisation des applications linéaires injectives par l'image d'une base*

Soient $E$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de $E$. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

Montrer que $f$ est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.

On raisonne par double implication :

$\underline{\Longrightarrow :}$ Supposons que $f$ injective, i.e. $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Montrons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F &\Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \quad \text{[par linéarité de } f\text{]} \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E \quad \text{[par injectivité de } f\text{]} \\
&\Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0_{\mathbb{K}} \quad \text{[car } (e_1, \ldots, e_n) \text{ base de } E\text{, donc est libre]}
\end{aligned}$$

Donc $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$.

$\underline{\Longleftarrow :}$ Supposons que $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de $F$. Montrons que $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$.

Comme $\{0_E\} \subset \mathrm{Ker}(f)$, il reste à montrer que $\mathrm{Ker}(f) \subset \{0_E\}$.

Soit $x \in \mathrm{Ker}(f)$, on a $f(x) = 0_F$ et $x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i$ où $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^n$ (coordonnées de $x$ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$).

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
f(x) = 0_F &\Longrightarrow f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i\right) = 0_F \\
&\Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \lambda_i f(e_i) = 0_F \quad \text{[par linéarité de } f\text{]} \\
&\Longrightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0 \quad \text{[car } (f(e_1), \ldots, f(e_n)) \text{ est libre dans } F\text{]} \\
&\Longrightarrow x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i e_i = 0_E.
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Ker}(f) = \{0_E\}$ et $f$ est injective.

$\square$