Programme de khôlle

Semaine 26 (5 avril 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 16 : Analyse asymptotique 1ère partie : négligeabilité et développements limités

Exercices réalisés : TD16, exercices n°1,2(a,b),3,4,6(a.b.),7,8(1.)

- Connaître les DL usuels en 0 des fonctions $\exp$, $\sin$, $\cos$, $x \mapsto \dfrac{1}{1 \pm x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$ ($\alpha \in \mathbb{R}$), $x \mapsto \ln(1+x)$, $\arctan$, ainsi que $\tan$ à l'ordre 3.
- Connaître la formule de Taylor-Young pour prévoir l'existence d'un DL pour les fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ (n fois dérivable suffit), la réciproque est fausse.
- Déterminer un DL simple, à un ordre modeste en 0 ou en $a \in \mathbb{R}$. Prévoir la nullité de certains coefficients.
- Appliquer les DL pour les calculs de limites, étudier comportement et les propriétés locales d'une fonction (prolongement par continuité, dérivabilité du prolongement, position de la courbe par rapport à la tangente), recherche d'asymptote.

Chapitre 17 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercices réalisés : TD17, exercices n°1(1.2.(a,b,c)),2,3,5,6,7,8,9,11,12(1.),13

- Montrer qu'une famille est libre ou liée (pour les vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on peut utiliser la matrice des vecteurs mis en colonne).
- Trouver une base d'un espace vectoriel, compléter (ou restreindre) une famille en une base.
- Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel (pour connaître sa dimension, ou dont on connaît déjà la dimension), déterminer une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Connaître et savoir utiliser les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.
- Montrer que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie (soit à l'aide d'une base adaptée, soit à l'aide de la caractérisation par les dimensions et l'intersection)
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
- Déterminer des bases du noyau et de l'ensemble image d'une application linéaire. Manipuler des applications linéaires caractérisées par l'image d'une base.
- Démontrer qu'une application linéaire est ou n'est pas bijective, par le théorème du rang (ou par la caractérisation des isomorphismes dans le cas $\dim(E) = \dim(F)$.

Chapitre 18 : Analyse asymptotique 2ème partie : équivalence et relation de domination

Exercices réalisés : TD18, exercices n°1

- Connaître les trois relations de comparaisons et savoir les caractériser à l'aide d'une limite.
- Connaître les équivalents usuels.
- Savoir utiliser les équivalents pour calculer des limites indéterminées.

Démonstrations exigibles

Khôlle en distanciel cette semaine, pas de démonstration.

Les démonstrations qui auraient été demandées sont :

1. *Existence de supplémentaires en dimension finie*

   Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F un sous-espace vectoriel de E. Montrer que F possède un supplémentaire G dans E, i.e. montrer qu'il existe un sous-espace vectoriel G de E tel que : $E = F \oplus G$.
   On admettra le théorème de la base incomplète.

2. *Caractérisations des sous-espaces vectoriels supplémentaires à l'aide des dimensions*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.

   Montrer les équivalences :

$$\underbrace{E = F \oplus G}_{(i)} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} F \cap G = \{0_E\} \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}}_{(ii)} \Longleftrightarrow \underbrace{\begin{cases} E = F + G \\ \dim(E) = \dim(F) + \dim(G) \end{cases}}_{(iii)}$$

   On admettra que $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$ *et la formule de Grassmann.*

3. *Caractérisation des applications linéaires injectives par l'image d'une base*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est une famille libre de F.

4. *Théorème du rang*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

   Montrer que f est de rang fini et que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\mathrm{rg}(f)}$.

5. *Isomorphismes en dimension finie*

   Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

   Montrer que : si $\dim(E) = \dim(F)$ alors

$$f \text{ bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ injective} \quad \Longleftrightarrow \quad f \text{ surjective.}$$