Programme de khôlle

Semaine 27 (26 avril 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 17 : Espaces vectoriels de dimension finie

Exercices réalisés : TD17, exercices n°1(1.2.(a,b,c)),2,3,5,6,7,8,9,11,12(1.),13

- Montrer qu'une famille est libre ou liée (pour les vecteurs de $\mathbb{K}^n$, on peut utiliser la matrice des vecteurs mis en colonne).
- Trouver une base d'un espace vectoriel, compléter (ou restreindre) une famille en une base.
- Montrer qu'une famille est une base d'un espace vectoriel (pour connaître sa dimension, ou dont on connaît déjà la dimension), déterminer une base d'un espace vectoriel de dimension finie.
- Connaître et savoir utiliser les bases canoniques de $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
- Construire un supplémentaire d'un sous-espace vectoriel en dimension finie.
- Montrer que des sous-espaces vectoriels sont supplémentaires en dimension finie (soit à l'aide d'une base adaptée, soit à l'aide de la caractérisation par les dimensions et l'intersection)
- Déterminer le rang d'une famille de vecteurs.
- Déterminer des bases du noyau et de l'ensemble image d'une application linéaire. Manipuler des applications linéaires caractérisées par l'image d'une base.
- Démontrer qu'une application linéaire est ou n'est pas bijective, par le théorème du rang (ou par la caractérisation des isomorphismes dans le cas $\dim(E) = \dim(F)$.

Chapitre 18 : Analyse asymptotique 2ème partie : équivalence et relation de domination

Exercices réalisés : TD18, la feuille en entier

- Connaître les trois relations de comparaisons et savoir les caractériser à l'aide d'une limite.
- Connaître les équivalents usuels.
- Savoir déterminer un équivalent simple d'une fonction/suite grâce aux équivalents usuels, à un développement limité.
- Savoir utiliser les équivalents pour calculer des limites indéterminées de fonctions/suites, pour réaliser une étude locale de fonction.

Chapitre 19 : Polynômes (début)

Exercices réalisés : TD19, exercices n°1,2,3,4,7,9,10

- Savoir calculer le produit de deux polynômes.
- Connaître la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Etudier une application linéaire sur des espaces de polynômes.
- Résoudre une équation dans $\mathbb{K}[X]$ par analyse-synthèse. Savoir utiliser les degrés, les coefficients dominant lors de la phase d'analyse.
- Savoir effectuer une division euclidienne de polynômes.

Démonstrations exigibles

Khôlle en distanciel cette semaine, pas de démonstration.

Les démonstrations qui auraient été demandées sont :

1. *Caractérisation des applications linéaires injectives par l'image d'une base*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ et $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Soit $f \in \mathscr{L}(E, F)$.
   Montrer que f est injective si et seulement si $(f(e_1), \ldots, f(e_n))$ est une famille libre de F.

2. *Théorème du rang*

   Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, F un $\mathbb{K}$-espace vectoriel quelconque et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

   Montrer que f est de rang fini et que $\dim(E) = \dim(\mathrm{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\mathrm{Im}(f))}_{=\mathrm{rg}(f)}$.

3. *Isomorphismes en dimension finie*

   Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie et $f \in \mathscr{L}(E, F)$.

   Montrer que : si $\dim(E) = \dim(F)$ alors

   $$f \text{ bijective} \iff f \text{ injective} \iff f \text{ surjective.}$$

4. *Existence d'un polynôme interpolateur (cf. exercice TD 19 n°10)*

   Soient $n \in \mathbb{N}$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $n+1$ points $(a_0; b_0), \ldots, (a_n; b_n)$ où les $\underline{a_i \text{ sont deux à deux distincts}}$.
   Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\underline{\text{inférieur ou égal à } n}$ tel que :

   $$\forall i \in [\![0; n]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$