Programme de khôlle

Semaine 28 (3 mai 2021)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 18 : Analyse asymptotique 2ème partie : équivalence et relation de domination

Exercices réalisés : TD18, la feuille en entier

- Connaître les trois relations de comparaisons et savoir les caractériser à l'aide d'une limite.
- Connaître les équivalents usuels.
- Savoir déterminer un équivalent simple d'une fonction/suite grâce aux équivalents usuels, à un développement limité.
- Savoir utiliser les équivalents pour calculer des limites indéterminées de fonctions/suites, pour réaliser une étude locale de fonction.

Chapitre 19 : Polynômes

Exercices réalisés : TD19, exercices n°1,2,3,4,7,9 (1.),10 (1.),11 (1.),13,14,15

- Savoir calculer le produit de deux polynômes.
- Connaître la structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
- Etudier une application linéaire sur des espaces de polynômes.
- Résoudre une équation dans $\mathbb{K}[X]$ par analyse-synthèse. Savoir utiliser les degrés, les coefficients dominant lors de la phase d'analyse.
- Savoir effectuer une division euclidienne de polynômes.
- Utiliser la formule de Taylor pour les polynômes.
- Savoir déterminer (lorsque c'est possible...) les racines d'un polynômes ainsi que leurs ordres de multiplicité.
- Savoir qu'un polynôme non nul admet au maximum $\deg(P)$ racines comptées avec multiplicité.
- Savoir factoriser complétement un polynôme dans $\mathbb{C}[X]$ (connaître le théorème de d'Alembert-Gauss) ou dans $\mathbb{R}[X]$.
- Connaître et savoir appliquer les relations entre les coefficients et la somme / le produit de ses racines (les autres relations coefficients-racines sont hors programme).

Chapitre 20 : Intégration (début)

Exercices réalisés : Aucun pour l'instant

- Connaître et savoir utiliser les propriétés algébriques de l'intégrale des fonctions continues : linéarité, Chasles, positivité, croissance, majoration de la valeur absolue (du module le cas échéant), critère de nullité.
- Connaître les formules de Taylor-Young et Taylor avec reste intégral ainsi que les hypothèses associées.

Démonstrations exigibles

Khôlle en distanciel cette semaine, pas de démonstration.

Les démonstrations qui auraient été demandées sont :

1. *Existence d'un polynôme interpolateur (cf. exercice TD 19 n°10)*

   Soient $n \in \mathbb{N}$. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on considère $n+1$ points $(a_0; b_0), \ldots, (a_n; b_n)$ où les $\underline{a_i \text{ sont deux à deux distincts}}$.
   Montrer qu'il existe un unique polynôme de degré $\underline{\text{inférieur ou égal à } n}$ tel que :

   $$\forall i \in [\![0; n]\!], \quad P(a_i) = b_i.$$

2. *Caractérisation de l'ordre de multiplicité d'une racine*

   Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Montrer que les deux points suivants sont équivalent :

   (i) a est racine multiple d'ordre $m \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ de P

   (ii) $\forall k \in [\![0; m-1]\!], \ P^{(k)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad P^{(m)}(a) \neq 0.$

3. *Formule de Taylor avec reste intégral*

Soient $n \in \mathbb{N}$, $f \in \mathscr{C}^{n+1}(I, \mathbb{K})$ où I est un intervalle et $a \in I$.

Montrer que : $\forall x \in I, \quad f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$