Démonstrations exigibles

Semaine 3 (14 septembre 2020)

---

1. *Première inégalité triangulaire :*
   Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

   preuve 1 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \quad \text{car } xy \leq |xy| \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &\leq \big(|x| + |y|\big)^2 \end{aligned}$$

   Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et comme $|x+y| \in \mathbb{R}_+$ et $|x| + |y| \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$\square$

2. *Seconde inégalité triangulaire :*
   Montrer que , pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$.

   preuve 2 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |x| &= |(x-y) + y| \\ &\leq |x-y| + |y| \quad \text{par la première inégalité triangulaire} \end{aligned}$$

   On en déduit que : $|x| - |y| \leq |x-y|$.

   De même, en permutant les rôles joués par x et y, on obtient que : $|y| - |x| \leq \overbrace{|y-x|}^{=|x-y|}$.
   En fin de compte, on a montré que :

$$\max\left(|x| - |y|, |y| - |x|\right) \leq |x-y|,$$

   ce qui s'écrit également

$$\big||x| - |y|\big| \leq |x-y|$$

   .

$\square$

3. *Exercice n°7 c) TD1 :*

Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que :

pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin nx| \leq n|\sin x|$.

preuve 3 : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: «$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$».

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, $|\sin(0x)| = |\sin(0)| = 0$ et $0.|\sin x| = 0$, d'où $|\sin(0x)| \leq 0.|\sin x|$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  On a :

$$\begin{aligned} |\sin\big((n+1)x\big)| &= |\sin\big(nx+x\big)| \\ &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \\ &\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\cos(nx)\sin(x)| \quad \text{[par la première inégalité triangulaire]} \\ &\leq |\sin(nx)| \times |\cos(x)| + |\cos(nx)| \times |\sin(x)| \end{aligned}$$

  Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\cos y| \leq 1$, on a :
  $|\sin(nx)| \times |\cos(x)| \leq |\sin(nx)|$ et $|\cos(nx)| \times |\sin(x)| \leq |\sin x|$.

  On déduit de ces deux dernières inégalités que :

$$\begin{aligned} |\sin\big((n+1)x\big)| &\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin(x)| \quad \text{[par hypothèse de récurrence]} \\ &\leq (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

□