Démonstrations exigibles

Semaine 4 (21 septembre 2020)

---

1. *Première inégalité triangulaire :*

   Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

   preuve 1 : Soient $x, y \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} |x+y|^2 &= (x+y)^2 \\ &= x^2 + 2xy + y^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|xy| + |y|^2 \quad \text{car } xy \leq |xy| \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 \\ &\leq \big(|x| + |y|\big)^2 \end{aligned}$$

   Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et comme $|x+y| \in \mathbb{R}_+$ et $|x| + |y| \in \mathbb{R}_+$, on en déduit que :

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

$\square$

2. *Exercice n°7 c) TD1 :*

   Soit $x \in \mathbb{R}$. En utilisant un raisonnement par récurrence, montrer que :

   pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\sin nx| \leq n|\sin x|$.

   preuve 2 : Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: «$|\sin(nx)| \leq n|\sin x|$».

   - $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, $|\sin(0x)| = |\sin(0)| = 0$ et $0.|\sin x| = 0$, d'où $|\sin(0x)| \leq 0.|\sin x|$.
   - Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

     On a :

$$\begin{aligned} |\sin\big((n+1)x\big)| &= |\sin\big(nx + x\big)| \\ &= |\sin(nx)\cos(x) + \cos(nx)\sin(x)| \\ &\leq |\sin(nx)\cos(x)| + |\cos(nx)\sin(x)| \quad \text{[par la première inégalité triangulaire]} \\ &\leq |\sin(nx)| \times |\cos(x)| + |\cos(nx)| \times |\sin(x)| \end{aligned}$$

     Comme, pour tout $y \in \mathbb{R}$, $|\cos y| \leq 1$, on a :

     $|\sin(nx)| \times |\cos(x)| \leq |\sin(nx)|$ et $|\cos(nx)| \times |\sin(x)| \leq |\sin x|$.

     On déduit de ces deux dernières inégalités que :

$$\begin{aligned} |\sin\big((n+1)x\big)| &\leq |\sin(nx)| + |\sin(x)| \\ &\leq n|\sin x| + |\sin(x)| \quad \text{[par hypothèse de récurrence]} \\ &\leq (n+1)|\sin x|. \end{aligned}$$

     Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

3. *Exemple n°13 du cours Chapitre 1 :*

   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leq x - 1$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

   preuve 3 : Introduisons la fonction $f : x \mapsto x - 1 - \ln x$.

   - La fonction f est définie et dérivable, par les théorèmes usuels, sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
   - Le signe de $f'(x)$ étant celui de $x - 1$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   - Il en résulte que la fonction f possède 0 pour minimum (atteint en $x = 1$) et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $0 \leq f(x)$, i.e. $\ln x \leq x - 1$.
   - La tangente (T_1) à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\ln}$ de la fonction $\ln$ au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation $T_1 : y = x - 1$. L'inégalité démontrée signifie donc que (T_1) est toujours située " au-dessus " de $\mathscr{C}_{\ln}$.

$\square$

4. *Relation fonctionnelle vérifiée par* $\ln$ *:*

   Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

   preuve 4 : Soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$. Introduisons la fonction $f : x \mapsto \ln(xy) - \ln x - \ln y$.

   - La fonction f est définie et dérivable, par les théorèmes usuels, sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = \dfrac{y}{yx} - \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi, la fonction f est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = C$.
   - Comme $C = f(1) = \ln y - \ln 1 - \ln y = 0$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = 0$.
   - Donc $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

   En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$.

   Soit $x \in \mathbb{R}_+^\star$.

   - D'une part, $\ln\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = \ln x + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$ par la relation précédemment démontrée.
   - D'autre part, $\ln\left(x \times \dfrac{1}{x}\right) = \ln 1 = 0$.
   - Donc $\ln x + \ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = 0$, i.e. $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln x$.

$\square$