Démonstrations exigibles

Semaine 4 (21 septembre 2020)

---

1. *Exemple n°13 du cours Chapitre 1 :*

   Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln x \leq x - 1$.

   Interpréter graphiquement ce résultat.

   Introduisons la fonction $f : x \mapsto x - 1 - \ln x$.

   - La fonction f est définie et dérivable, par les théorèmes usuels, sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x-1}{x}$.
   - Le signe de $f'(x)$ étant celui de $x - 1$, on en déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$\Vert$	$\searrow$	0	$\nearrow$	

   - Il en résulte que la fonction f possède 0 pour minimum (atteint en $x = 1$) et donc que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $0 \leq f(x)$, i.e. $\ln x \leq x - 1$.
   - La tangente (T_1) à la courbe représentative $\mathscr{C}_{\ln}$ de la fonction $\ln$ au point d'abscisse $x = 1$ a pour équation $T_1 : y = x - 1$. L'inégalité démontrée signifie donc que (T_1) est toujours située " au-dessus " de $\mathscr{C}_{\ln}$.

$\square$

2. *Relation fonctionnelle vérifiée par* $\ln$ *:*

   Montrer que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^\star$, $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

   Soit $y \in \mathbb{R}_+^\star$. Introduisons la fonction $f : x \mapsto \ln(xy) - \ln x - \ln y$.

   - La fonction f est définie et dérivable, par les théorèmes usuels, sur $\mathbb{R}_+^\star$.
   - De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, on a $f'(x) = \dfrac{y}{yx} - \dfrac{1}{x} = 0$. Ainsi, la fonction f est constante sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = C$.
   - Comme $C = f(1) = \ln y - \ln 1 - \ln y = 0$. On en déduit que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f(x) = 0$.
   - Donc $\ln(xy) = \ln x + \ln y$.

$\square$

3. *Factorisation $a^n - b^n$ et formule de Pascal :*

- *Factorisation $a^n - b^n$*

  Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

  On a

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1}(a-b)a^k b^{n-k-1} \quad \text{[par linéarité]} \\
&= \sum_{k=0}^{n-1}(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}) \quad \text{[on reconnait une somme télescopique]} \\
&= a^n b^0 - a^0 b^n \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

$\square$

- *Formule de Pascal*

  Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. Montrons que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

  — Cas $k = 0$. On a $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\overbrace{\binom{n}{0}}^{=1} + \overbrace{\binom{n}{-1}}^{=0} = 1$, d'où l'égalité.

  — Cas $k \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!} \\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!} \\
&= \frac{n!(n-k+1) + kn!}{k!(n-k+1)!} \\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!} \\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

  La formule est donc satisfaite.

$\square$

4. *Formule du binôme de Newton :*

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: «$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$».

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

  D'où l'égalité.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{[par hypothèse de récurrence]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \quad \text{[par linéarité]} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \quad \text{[par changement d'indice : } j = k+1] \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} \quad \text{[par linéarité]} \\
&= \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} a^0\, b^{n+1} \quad \text{[par la formule de Pascal]} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$