Démonstrations exigibles

Semaine 6 (5 octobre 2020)

---

1. *Factorisation $a^n - b^n$ et formule de Pascal :*

   - *Factorisation $a^n - b^n$*

     Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^\star$. Montrons que $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1}$.

     On a

$$\begin{aligned}
(a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-k-1} &= \sum_{k=0}^{n-1} (a-b)a^k b^{n-k-1} \quad \text{[par linéarité]}\\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \left(a^{k+1}b^{n-(k+1)} - a^k b^{n-k}\right) \quad \text{[on reconnait une somme télescopique]}\\
&= a^n b^0 - a^0 b^n\\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

$\square$

   - *Formule de Pascal*

     Soient $n, k \in \mathbb{N}$ tels que $0 \leq k \leq n$. Montrons que $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$.

     — Cas $k = 0$. On a $\binom{n+1}{0} = 1$ et $\overbrace{\binom{n}{0}}^{=1} + \overbrace{\binom{n}{-1}}^{=0} = 1$, d'où l'égalité.

     — Cas $k \geq 1$. On a :

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} &= \frac{n!}{k!(n-k)!} + \frac{n!}{(k-1)!(n-(k-1))!}\\
&= \frac{n!(n-k+1)}{k!(n-k)!(n-k+1)} + \frac{kn!}{k(k-1)!(n-k+1)!}\\
&= \frac{n!(n-k+1)+kn!}{k!(n-k+1)!}\\
&= \frac{(n+1)!}{k!((n+1)-k)!}\\
&= \binom{n+1}{k}
\end{aligned}$$

     La formule est donc satisfaite.

$\square$

2. *Formule du binôme de Newton :*

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition $\mathscr{P}(n)$: $\ll (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \gg$.

- $\mathscr{P}(0)$ est vraie. En effet, on a d'une part $(a+b)^0 = 1$ et d'autre part $\sum_{k=0}^{0} \binom{0}{k} a^k b^{0-k} = \binom{0}{0} a^0 b^0 = 1$.

  D'où l'égalité.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $\mathscr{P}(n)$ est vraie et montrons que $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

  On a :

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)(a+b)^n \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \quad \text{[par hypothèse de récurrence]} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \quad \text{[par linéarité]} \\
&= \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} a^j b^{n-(j-1)} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} \quad \text{[par changement d'indice : } j = k+1\text{]} \\
&= \binom{n}{n} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} a^k b^{n+1-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} a^k\, b^{n+1-k} + \binom{n}{0} a^0\, b^{n+1} \\
&= \underbrace{\binom{n}{n}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} a^0 b^{n+1} \quad \text{[par linéarité]} \\
&= \underbrace{\binom{n+1}{n+1}}_{=1} a^{n+1} b^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k} + \underbrace{\binom{n+1}{0}}_{=1} a^0\, b^{n+1} \quad \text{[par la formule de Pascal]} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

  Donc $\mathscr{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, la proposition $\mathscr{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$\square$

3. *Présentation de la fonction* $\arctan$ *:*

On définira cette fonction, puis on établira sa continuité, son sens de variation, sa dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

On finira en représentant sur un même graphique la fonction $\arctan$ ainsi que $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ en précisant le lien géométrique entre les deux graphes.

Pour cette preuve les théorèmes de continuité, de dérivabilité et l'expression de la dérivée de f^{-1} sont admis mais doivent pouvoir être cités. La parité n'est pas à étudier.

- **Définition et continuité :** La fonction tangente est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

  Le théorème de la bijection nous assure que :

  ⋆ $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
  On définit alors :

  $$\boxed{\left(\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}\right)^{-1} \overset{\text{déf.}}{=} \arctan}$$

  ⋆ $\boxed{\text{La fonction } \arctan : \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R} \text{ est bijective, continue et strictement croissante}}$.

- **Dérivabilité et dérivée :** La fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et :
  $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. En particulier, $\tan'$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

  Le théorème de dérivabilité de la réciproque nous assure que :

  ⋆ $\boxed{\arctan \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

  ⋆ De plus :

  $$\begin{aligned} \forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) &= \frac{1}{\tan'(\arctan y)} \\ &= -\frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} \\ &= \frac{1}{1+y^2} \end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$.

- **Graphe :** Les graphes des fonctions $\tan_{|\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$ et $\arctan$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.