Programme de khôlle

Semaine 7 (12 octobre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 3 : Nouvelles fonctions usuelles

Exercices réalisés : TD3, exercices n°1 à 7, n°8 1)2)3)(a,b,c) et le n°9

- Connaître la définition et les propriétés des fonctions hyperboliques (dérivée, variation, graphe)) **(uniquement ch et sh, th est hors programme)**.
- Connaître la définition et les propriétés des fonctions puissances (dérivée, variation, graphe).
- Savoir étudier une fonction du type $u(x)^{v(x)}$.
- Savoir lever des formes indéterminées de limite par des arguments de croissances comparées.
- Connaître la définition de fonction bijective et de réciproque d'une bijection.
- Connaître et savoir utiliser le théorème de la bijection (continue strictement monotone) pour établir qu'une fonction réalise une bijection et étudier la continuité, la monotonie de la fonction réciproque. Expliciter une réciproque par résolution de l'équation $y = f(x)$.
- Connaître et savoir utiliser le théorème de dérivabilité de la réciproque. Connaître l'expression de la dérivée d'une réciproque et pouvoir l'expliquer graphiquement.
- Connaître les fonctions circulaires réciproques ($\arcsin$, $\arccos$, $\arctan$) et leurs propriétés (ensemble de définition, de dérivabilité, dérivée, variation et graphe).

Chapitre 4 : Nombres complexes

Exercices réalisés : TD4, exercices n°1,2,3,5 et 7

- Savoir manipuler des formes algébriques, des parties réelles, imaginaires, des conjugués, des modules et connaître leurs propriétés.
  Les notions d'argument et de forme polaire n'ont pas encore été travaillées.
- Déterminer des lieux simples de points dont l'affixe vérifie une équation dans $\mathbb{C}$ (vu en cours : cercle, disque et médiatrice d'un segment).
- Connaître et utiliser les formules de Moivre et Euler pour retrouver des formules trigonométriques. En particulier, savoir retrouver les factorisations de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$ à partir d'une factorisation de $e^{ia} + e^{ib}$.
- Savoir linéariser une expression du type $\cos^p(x)\sin^q(x)$.
  La "dé"-linéarisation a été vu en cours, mais aucun exercice n'a pour l'instant été traité.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Présentation de la fonction* $\arctan$ *:*
   On définira cette fonction, puis on établira sa continuité, son sens de variation, sa dérivabilité et l'expression de sa dérivée.
   On finira en représentant sur un même graphique la fonction $\arctan$ ainsi que $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ en précisant le lien géométrique entre les deux graphes.
   Pour cette preuve les théorèmes de continuité, de dérivabilité et l'expression de la dérivée de f^{-1} sont admis mais doivent pouvoir être cités. La parité n'est pas à étudier.
2. *Présentation de la fonction* $\arcsin$ *:*
   On définira cette fonction, puis on établira sa continuité, son sens de variation, sa dérivabilité et l'expression de sa dérivée (on ne manquera pas à cette occasion de montrer que, pour tout $y \in [-1;1],\ \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$).
   On finira en représentant sur un même graphique la fonction $\arcsin$ ainsi que $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ en précisant le lien géométrique entre les deux graphes.

Pour cette preuve les théorèmes de continuité, de dérivabilité et l'expression de la dérivée de f^{-1} sont admis mais doivent pouvoir être cités. La parité n'est pas à étudier.

3. *Première inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:*

   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}, \quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

   (b) Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}, \quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
   On interprétera géométriquement cette inégalité. Le cas d'égalité n'est pas à traiter mais doit être connu.

4. *Sur les nombres complexes de module 1*

   (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{ia}\, e^{ib} = e^{i(a+b)}$
   (on admet les formules d'addition pour le cosinus et le sinus).

   (b) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}, \quad e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$.
   En déduire une factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$.