Démonstrations exigibles

Semaine 7 (12 octobre 2020)

---

1. *Présentation de la fonction* $\arctan$ *:*

   On définira cette fonction, puis on établira sa continuité, son sens de variation, sa dérivabilité et l'expression de sa dérivée.

   On finira en représentant sur un même graphique la fonction $\arctan$ ainsi que $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ en précisant le lien géométrique entre les deux graphes.

   Pour cette preuve les théorèmes de continuité, de dérivabilité et l'expression de la dérivée de f^{-1} sont admis mais doivent pouvoir être cités. La parité n'est pas à étudier.

   - **Définition et continuité :** La fonction tangente est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

     Le théorème de la bijection nous assure que :

     ⋆ $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ définit une bijection de $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ sur l'intervalle $\mathbb{R}$.
     On définit alors :

     $$\boxed{\left(\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}\right)^{-1} \overset{\text{déf.}}{=} \arctan}$$

     ⋆ $\boxed{\text{La fonction } \arctan : \mathbb{R} \longrightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[\text{ est bijective, continue et strictement croissante}}$.

   - **Dérivabilité et dérivée :** La fonction tangente est dérivable sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ et :
     $\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$. En particulier, $\tan'$ ne s'annule pas sur $\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$.

     Le théorème de dérivabilité de la réciproque nous assure que :

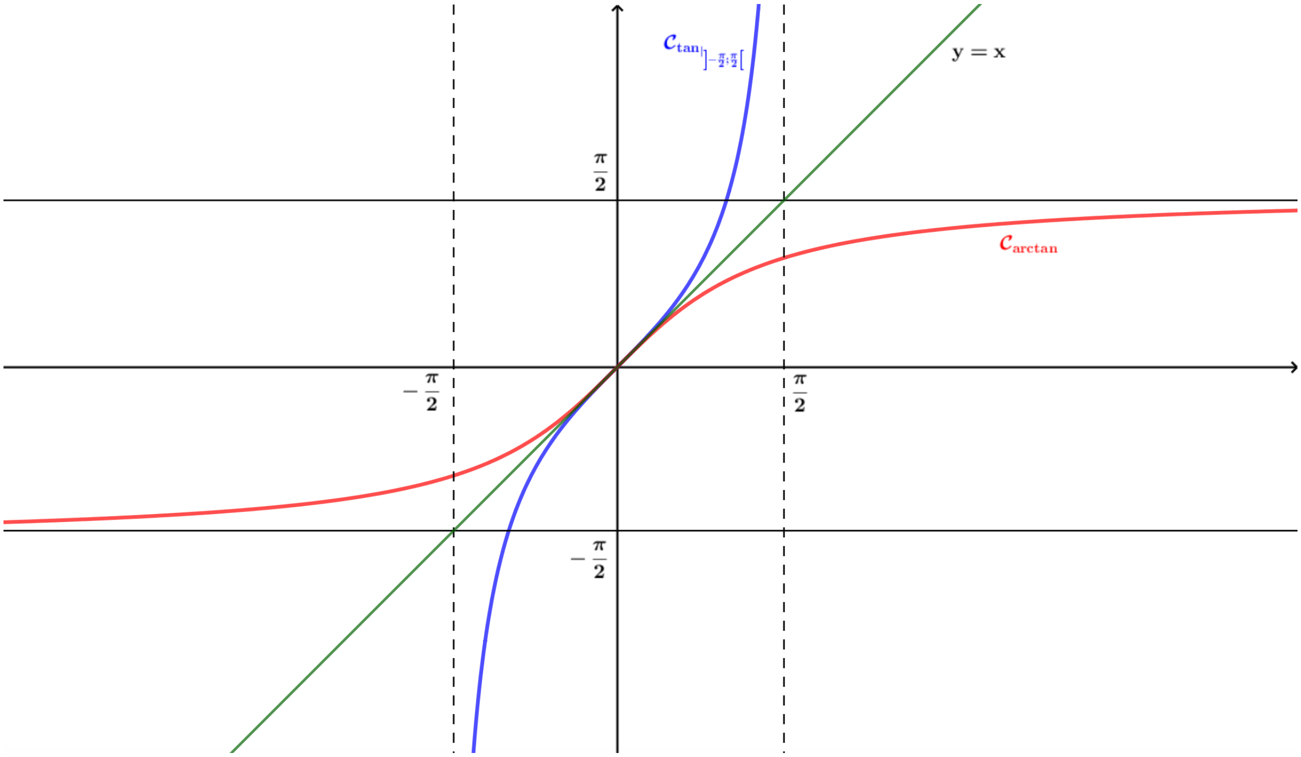
     ⋆ $\boxed{\arctan \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}}$.

     ⋆ De plus :

     $$\begin{aligned}\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) &= \frac{1}{\tan'(\arctan y)} \\ &= -\frac{1}{1+\tan^2(\arctan y)} \\ &= \frac{1}{1+y^2}\end{aligned}$$

     Donc $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arctan'(y) = \frac{1}{1+y^2}}$.

   - **Graphe :** Les graphes des fonctions $\tan_{|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$ et $\arctan$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.


$\mathcal{C}_{\tan|]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}[}$
$y = x$
$\frac{\pi}{2}$
$\mathcal{C}_{\arctan}$
$-\frac{\pi}{2}$
$\frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2}$

2. *Présentation de la fonction* arcsin *:*

   On définira cette fonction, puis on établira sa continuité, son sens de variation, sa dérivabilité et l'expression de sa dérivée (on ne manquera pas à cette occasion de montrer que, pour tout $y \in [-1;1]$, $\cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}$).

   On finira en représentant sur un même graphique la fonction arcsin ainsi que $\sin_{|[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]}$ en précisant le lien géométrique entre les deux graphes.

   Pour cette preuve les théorèmes de continuité, de dérivabilité et l'expression de la dérivée de f^{-1} sont admis mais doivent pouvoir être cités. La parité n'est pas à étudier.

   - **Définition et continuité :** La fonction sinus est continue, strictement croissante sur l'intervalle $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$.

     Le théorème de la bijection nous assure que :

     ⋆ $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ définit une bijection de $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ sur l'intervalle $[-1;1]$.
     On définit alors :

     $$\boxed{\left(\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}\right)^{-1} \overset{\text{déf.}}{=} \arcsin}$$

     ⋆ $\boxed{\text{La fonction } \arcsin : [-1;1] \longrightarrow \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right] \text{ est bijective, continue et strictement croissante}}$.

   - **Dérivabilité et dérivée :** La fonction sinus est dérivable sur $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ et :
     $\forall x \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right], \quad \sin'(x) = 0 \iff \cos(x) = 0 \iff x = \frac{\pi}{2}$ ou $x = -\frac{\pi}{2}$.

     Le théorème de dérivabilité de la réciproque nous assure que :

     ⋆ $\boxed{\arcsin \text{ est dérivable sur } [-1;1] \backslash \left\{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right); \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right\} = [-1;1]\backslash\{1;-1\} =]-1;1[}$.

     ⋆ De plus :

     $$\begin{aligned} \forall y \in]-1;1[, \quad \arcsin'(y) &= \frac{1}{\sin'(\arcsin y)} \\ &\overset{(\star)}{=} \frac{1}{\cos(\arcsin y)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} \end{aligned}$$

     Donc $\boxed{\forall y \in \mathbb{R}, \quad \arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$.

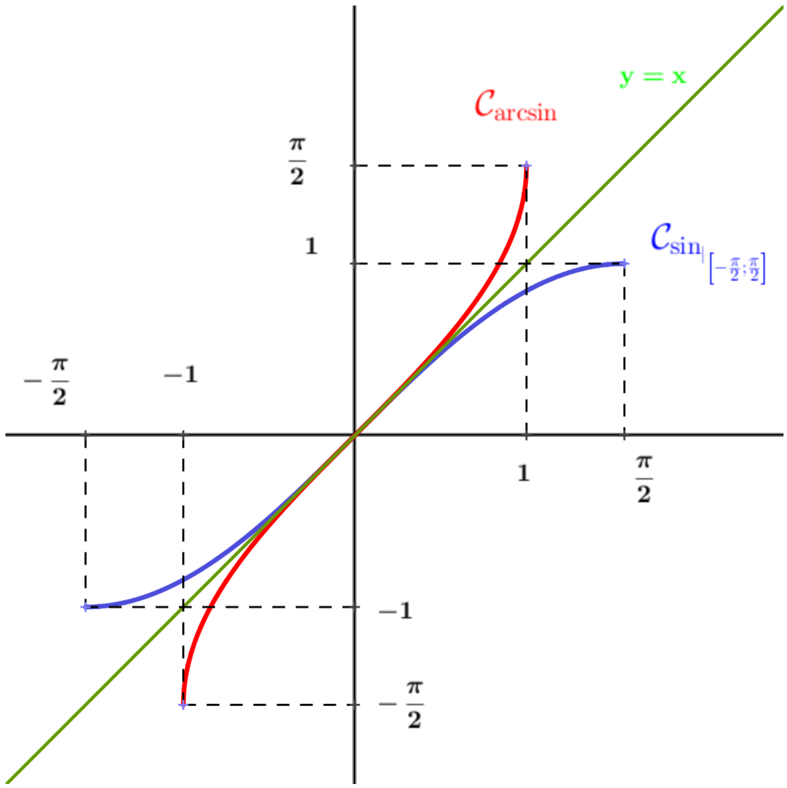
     Explications de $(\star)$: $\boxed{\text{Pour tout } y \in [-1;1], \quad \cos(\arcsin y) = \sqrt{1-y^2}}$.

     En effet, pour $y \in [-1;1]$, on a $\begin{cases} \sin(\arcsin y) = y \\ \cos^2(\arcsin y) + \sin^2(\arcsin y) = 1 \end{cases}$

     d'où $\cos^2(\arcsin y) = 1 - y^2$ et $|\cos(\arcsin y)| = \sqrt{1-y^2}$.

     Or $\arcsin y \in \left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$, donc $\cos(\arcsin y) \geq 0$ et $\cos(\arcsin y) = |\cos(\arcsin y)| = \sqrt{1-y^2}$.

- **Graphe :** Les graphes des fonctions $\sin_{|\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]}$ et $\arcsin$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice d'équation $y = x$.



3. *Première inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:*

   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.

   (b) Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$.

   On interprétera géométriquement cette inégalité. Le cas d'égalité n'est pas à traiter mais doit être connu.

Preuve :

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $(\mathrm{Re}(z))^2 \leq (\mathrm{Re}(z))^2 + \overbrace{(\mathrm{Im}(z))^2}^{\geq 0} = |z|^2$.

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\quad (\star) \quad \boxed{|\mathrm{Re}(z)| \leq |z|}$.

(b) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

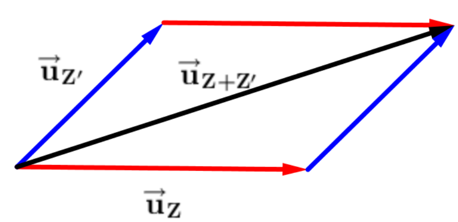
$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\
&= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \quad \text{[par linéarité de la conjugaison]} \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 \\
&= |z|^2 + 2\,\mathrm{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2\,|z\overline{z'}| + |z'|^2 \quad \text{[par la relation } (\star)\text{]} \\
&\leq |z|^2 + 2\,|z||z'| + |z'|^2 \quad \text{[par propriétés du module, lesquelles ?]} \\
&\leq \left(|z| + |z'|\right)^2
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et comme $|z + z'|, |z|, |z'| \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Interprétation géométrique : Dans un triangle la longueur d'un des côtés est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.

$$|\mathbf{z} + \mathbf{z}'| \leq |\mathbf{z}| + |\mathbf{z}'|$$



Cas d'égalité : Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad |z + z'| = |z| + |z'| \iff \vec{u}_z$ et $\vec{u}_{z'}$ sont colinéaires de même sens.

4. *Sur les nombres complexes de module 1*

   (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ia}\, e^{ib} = e^{i(a+b)}$

   (on admet les formules d'addition pour le cosinus et le sinus).

   (b) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$.

   En déduire une factorisation de $\quad \cos(a) + \cos(b) \quad$ et $\quad \sin(a) + \sin(b)$.

Preuve : Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) On a

$$\begin{aligned} e^{ia}\, e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\ &= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)) \\ &= \cos(a+b) + i\sin(a+b) \\ &= e^{i(a+b)}. \end{aligned}$$

(b) En factorisant l'expression $e^{ia} + e^{ib}$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned} e^{ia} + e^{ib} &= \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \\ &= \left(2\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \quad \text{[Formules d'Euler]} \\ &= \underbrace{2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{=\mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib})} + i\underbrace{\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}_{=\mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib})} \end{aligned}$$

Donc, comme $\cos(a) + \cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}(e^{ia} + e^{ib})$ et $\sin(a) + \sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia}) + \mathrm{Im}(e^{ib}) = \mathrm{Im}(e^{ia} + e^{ib})$, on obtient les factorisations souhaitées :

- $\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$
- $\boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$