Programme de khôlle

Semaine 8 (2 novembre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 4 : Nombres complexes

Exercices réalisés : TD4, exercices n°1,2,3,5,7,8,9,11,12,13,14,15(1.),16(1.),18(3.,5.)

- Savoir manipuler des formes algébriques, des parties réelles, imaginaires, des conjugués, des modules et connaître leurs propriétés.
- Déterminer des lieux simples de points dont l'affixe vérifie une équation dans $\mathbb{C}$ (vu en cours : cercle, disque et médiatrice d'un segment).
- Connaître et utiliser les formules de Moivre et Euler pour retrouver des formules trigonométriques. En particulier, savoir retrouver les factorisations de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$ à partir d'une factorisation de $e^{ia} + e^{ib}$.
- Savoir linéariser une expression du type $\cos^p(x)\sin^q(x)$. "Dé"-linéariser les expressions $\cos(nx)$, $\sin(nx)$.
- Savoir déterminer une forme trigonométrique à partir de la forme algébrique et vice-versa.
- Connaître les racines n-ième de l'unité (sous forme trigonométrique) et savoir les utiliser pour déterminer les racines n-ième de tout nombre complexe (sous forme trigonométrique). Dans le cas particulier de la recherche des racines carrées : connaître la méthode permettant d'obtenir directement les formes algébriques.
- Résoudre des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Utiliser les complexes en géométrie : calcul d'angles, problème d'alignement, d'orthogonalité.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Première inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:*
   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad |\mathrm{Re}(z)| \leq |z|$.
   (b) Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
   On interprétera géométriquement cette inégalité. Le cas d'égalité n'est pas à traiter mais doit être connu.
2. *Sur les nombres complexes de module 1*
   (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ia}\,e^{ib} = e^{i(a+b)}$
   (on admet les formules d'addition pour le cosinus et le sinus).
   (b) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$.
   En déduire une factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$.
3. *Calcul d'une somme trigonométrique (exercice n°9)*
   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de n et x, une expression sans le symbole $\sum$ de
   $$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$
4. *Déterminer les racines n-ième d'un nombre complexe (tiré de l'exercice n°15 1. et d'un exemple du cours)*
   (a) Expliciter, sous forme algébrique, les racines carrées de $-8 - 6i$.
   (b) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines 5-ième de $\sqrt{2} + i\sqrt{2}$.