Démonstrations exigibles

Semaine 8 (2 novembre 2020)

---

1. *Première inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:*

   (a) Montrer que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\quad |\text{Re}(z)| \leq |z|$.

   (b) Montrer que, pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad |z + z'| \leq |z| + |z'|$.
   On interprétera géométriquement cette inégalité. Le cas d'égalité n'est pas à traiter mais doit être connu.

Preuve :

(a) Soit $z \in \mathbb{C}$. On a $(\text{Re}(z))^2 \leq (\text{Re}(z))^2 + \overbrace{(\text{Im}(z))^2}^{\geq 0} = |z|^2$.
Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$, on obtient : $\quad (\star) \quad \boxed{|\text{Re}(z)| \leq |z|}$.

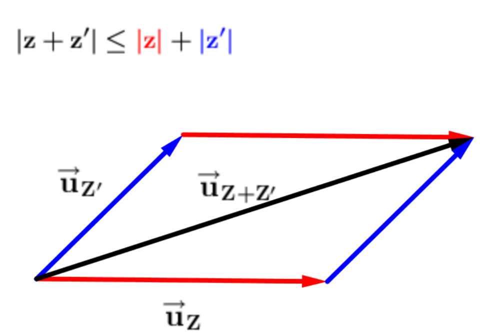
(b) Soient $z, z' \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned}
|z + z'|^2 &= (z + z')\overline{(z + z')} \\
&= (z + z')(\overline{z} + \overline{z'}) \quad \text{[par linéarité de la conjugaison]} \\
&= z\overline{z} + z\overline{z'} + z'\overline{z} + z'\overline{z'} \\
&= |z|^2 + z\overline{z'} + \overline{z\overline{z'}} + |z'|^2 \\
&= |z|^2 + 2\,\text{Re}\left(z\overline{z'}\right) + |z'|^2 \\
&\leq |z|^2 + 2\left|z\overline{z'}\right| + |z'|^2 \quad \text{[par la relation } (\star)\text{]} \\
&\leq |z|^2 + 2\,|z||z'| + |z'|^2 \quad \text{[par propriétés du module, lesquelles ?]} \\
&\leq \left(|z| + |z'|\right)^2
\end{aligned}$$

Par croissance de la fonction racine carrée sur $\mathbb{R}_+$ et comme $|z + z'|, |z|, |z'| \in \mathbb{R}_+$, on obtient :

$$|z + z'| \leq |z| + |z'|$$

Interprétation géométrique : Dans un triangle la longueur d'un des côtés est toujours inférieure ou égale à la somme des longueurs des deux autres côtés.



Cas d'égalité : Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, $\quad |z + z'| = |z| + |z'| \iff \vec{u}_z$ et $\vec{u}_{z'}$ sont colinéaires de même sens.

2. *Sur les nombres complexes de module 1*

   (a) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ia}\, e^{ib} = e^{i(a+b)}$

   (on admet les formules d'addition pour le cosinus et le sinus).

   (b) Montrer que, pour tous $a, b \in \mathbb{R}$, $\quad e^{ia} + e^{ib} = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right) e^{i\frac{a+b}{2}}$.

   En déduire une factorisation de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$.

<u>Preuve :</u> Soient $a, b \in \mathbb{R}$.

(a) On a

$$\begin{aligned}
e^{ia}\, e^{ib} &= (\cos(a) + i\sin(a))(\cos(b) + i\sin(b)) \\
&= (\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)) + i(\sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)) \\
&= \cos(a+b) + i\sin(a+b) \\
&= e^{i(a+b)}.
\end{aligned}$$

(b) En factorisant l'expression $e^{ia} + e^{ib}$ par $e^{i\frac{a+b}{2}}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
e^{ia} + e^{ib} &= \left(e^{i\frac{a-b}{2}} + e^{-i\frac{a-b}{2}}\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \\
&= \left(2\,\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\right) e^{i\frac{a+b}{2}} \quad \text{[Formules d'Euler]} \\
&= \underbrace{2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)}_{=\mathrm{Re}(e^{ia}+e^{ib})} + i\underbrace{\left(2\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)}_{=\mathrm{Im}(e^{ia}+e^{ib})}
\end{aligned}$$

Donc, comme $\cos(a) + \cos(b) = \mathrm{Re}(e^{ia}) + \mathrm{Re}(e^{ib}) = \mathrm{Re}(e^{ia} + e^{ib})$ et $\sin(a) + \sin(b) = \mathrm{Im}(e^{ia}) + \mathrm{Im}(e^{ib}) = \mathrm{Im}(e^{ia} + e^{ib})$, on obtient les factorisations souhaitées :

- $\boxed{\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\cos\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$
- $\boxed{\sin(a) + \sin(b) = 2\cos\left(\dfrac{a-b}{2}\right)\sin\left(\dfrac{a+b}{2}\right)}$

3. *Calcul d'une somme trigonométrique (exercice n°9)*

Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de n et x, une expression sans le symbole $\sum$ de

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

<u>Preuve :</u> On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \quad \text{[par } \mathbb{R}\text{-linéarité de Re]} \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k\right) \quad \text{[par la formule de Moivre]}
\end{aligned}$$

On détermine une nouvelle expression de la somme géométrique $\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k$.

- Dans le cas où $e^{ix} = 1$, i.e. $\boxed{x \equiv 0\ [2\pi]}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = n+1.$$

- Dans le cas où $e^{ix} \neq 1$, i.e. $\boxed{x \not\equiv 0\ [2\pi]}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k &= \frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \quad \text{[par la formule de Moivre]} \\
&= \frac{\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}\right)e^{i\frac{n+1}{2}x}}{\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right)e^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)e^{i\frac{n+1}{2}x}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right)e^{i\frac{x}{2}}} \quad \text{[formule d'Euler]} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{n}{2}x}
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle des expressions obtenues :

- Si $\boxed{x \equiv 0\ [2\pi]}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}(n+1) = \boxed{n+1}$.
- Si $\boxed{x \not\equiv 0\ [2\pi]}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{n}{2}x}\right) = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)}$.

4. *Déterminer les racines n-ième d'un nombre complexe (tiré de l'exercice n°15 1. et d'un exemple du cours)*

   (a) Expliciter, sous forme algébrique, les racines carrées de $-8-6i$.

   (b) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines 5-ième de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Preuve :

(a) Pour tout $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$z^2 = -8-6i \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = -8-6i \\ |x+iy|^2 = |-8-6i| \quad \text{[égalité des modules]} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2 = -8 & \text{[identification des parties réelles]} \\ x^2+y^2 = 10 & \text{[égalité des modules]} \\ 2xy = -6 & \text{[identification des parties imaginaires]} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \quad \text{OU} \quad x = -1 \\ y = 3 \quad \text{OU} \quad y = -3 \\ xy = -3 < 0 \quad [x \text{ et } y \text{ sont de signe opposé}] \end{cases}$$

$$\iff (x = 1 \quad \text{ET} \quad y = -3) \quad \text{OU} \quad (x = -1 \quad \text{ET} \quad y = 3)$$

$$\iff z = 1-3i \quad \text{OU} \quad z = -1+3i$$

$\boxed{\text{Les racines de } -8-6i \text{ sont donc } \quad 1-3i \quad , \quad -1+3i}$.

(b) Etant donné que $|\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$ et qu'un argument de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est donné par $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on a $\boxed{\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}}$.
Une racine 5-ième est donnée par $2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z^5 = \sqrt{2}+i\sqrt{2} &\iff z^5 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff z^5 = \left(2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right)^5 \\ &\iff \left(\frac{z}{2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}}\right)^5 = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ \frac{z}{2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k \\ &\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ z = \left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k \end{aligned}$$

Les racines 5-ième de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ sont donc :

$$\boxed{2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\ ;\ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{i\frac{9\pi}{20}}}\ ;\ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{i\frac{17\pi}{20}}}\ ;\ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}\ ;\ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{-i\frac{7\pi}{20}}}}$$