Programme de khôlle

Semaine 9 (9 novembre 2020)

La khôlle est constituée :

- d'une démonstration exigible du cours, préparée au tableau, puis exposée
- d'un exercice facile
- d'un exercice plus difficile.

Chapitre 4 : Nombres complexes

Exercices réalisés : TD4, exercices n°1,2,3,5,7,8,9,11,12,13,14,15(1.),16(1.),18(3.,5.)

- Savoir manipuler des formes algébriques, des parties réelles, imaginaires, des conjugués, des modules et connaître leurs propriétés.
- Déterminer des lieux simples de points dont l'affixe vérifie une équation dans $\mathbb{C}$ (vu en cours : cercle, disque et médiatrice d'un segment).
- Connaître et utiliser les formules de Moivre et Euler pour retrouver des formules trigonométriques. En particulier, savoir retrouver les factorisations de $\cos(a) + \cos(b)$ et $\sin(a) + \sin(b)$ à partir d'une factorisation de $e^{ia} + e^{ib}$.
- Savoir linéariser une expression du type $\cos^p(x)\sin^q(x)$. "Dé"-linéariser les expressions $\cos(nx)$, $\sin(nx)$.
- Savoir déterminer une forme trigonométrique à partir de la forme algébrique et vice-versa.
- Connaître les racines n-ième de l'unité (sous forme trigonométrique) et savoir les utiliser pour déterminer les racines n-ième de tout nombre complexe (sous forme trigonométrique). Dans le cas particulier de la recherche des racines carrées : connaître la méthode permettant d'obtenir directement les formes algébriques.
- Résoudre des équations du second degré à coefficients dans $\mathbb{C}$.
- Utiliser les complexes en géométrie : calcul d'angles, problème d'alignement, d'orthogonalité.

Chapitre 5 : Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Exercices réalisés : TD5, exercices n°1,2,3(1.),5(1.2.3.4.),6(1.2.5.6.)

- Etudier l'existence de primitives et les calculer par reconnaissante d'une forme usuelle (primitives usuelles, dérivée d'une composée). La notation $\int f(t)\,\mathrm{d}t$ désigne une primitive de f sur un intervalle donné.
- Savoir déterminer des primitives de fonctions du type : $t \mapsto e^{bt}\cos(at)$ ou $t \to e^{bt}\sin(at)$ (en passant par les complexes), $t \mapsto \cos^p(t)\sin^q(t)$ (par linéarisation), $t \mapsto \dfrac{1}{at^2+bt+c}$.

  Note : Ne pas demander d'intégration par parties ni de changement de variable dans ce chapitre
- Savoir résoudre une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients continus, avec ou sans condition initiale, de manière autonome.
  - ⋆ Dans le cas où les coefficients sont constants : une solution particulière pourra être cherchée sous une forme adaptée au second membre (cas travaillé en cours : second membre constant, polynomial, trigonométrique).
  - ⋆ Dans le cas général : chercher une solution évidente ; à défaut, on utilisera la méthode de variation de la constante.

Démonstrations exigibles

Les démonstrations effectuées en cours sont disponibles en ligne dans la section programme de khôlle.

1. *Calcul d'une somme trigonométrique (exercice n°9)*

   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de n et x, une expression sans le symbole $\sum$ de
   $$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$
2. *Déterminer les racines n-ième d'un nombre complexe (tiré de l'exercice n°15 1. et d'un exemple du cours)*
   (a) Expliciter, sous forme algébrique, les racines carrées de $-8-6i$.
   (b) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines 5-ième de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.
3. *Intégrale d'une fonction rationnelle (tirée du TD5 exercice n°3)*

   Faire l'une des deux questions suivantes (au choix de l'examinateur) :

- $\star$ Etudier l'existence, en fonction de x, de l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}}\,\mathrm{dt}$, puis la calculer.
- $\star$ Etudier l'existence, en fonction de x, de l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2}\,\mathrm{dt}$, puis la calculer.

4. *Résolution d'une EDL d'ordre un sans second membre*

   On considère l'équation différentielle $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$ où $a : I \to \mathbb{K}$ continue ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

   Déterminer les solutions de (E) sur I. On raisonnera par analyse-synthèse.