Démonstrations exigibles

Semaine 8 (2 novembre 2020)

---

1. *Calcul d'une somme trigonométrique (exercice n°9)*

   Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$. Déterminer, en fonction de n et x, une expression sans le symbole $\sum$ de

$$\sum_{k=0}^{n} \cos(kx)$$

Preuve : On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) &= \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Re}(e^{ikx}) \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} e^{ikx}\right) \quad \text{[par } \mathbb{R}\text{-linéarité de Re]} \\
&= \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k\right) \quad \text{[par la formule de Moivre]}
\end{aligned}$$

On détermine une nouvelle expression de la somme géométrique $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k$.

- Dans le cas où $e^{ix} = 1$, i.e. $\boxed{x \equiv 0\ [2\pi]}$, on a

$$\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k = n+1.$$

- Dans le cas où $e^{ix} \neq 1$, i.e. $\boxed{x \not\equiv 0\ [2\pi]}$, on a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} \left(e^{ix}\right)^k &= \frac{1-\left(e^{ix}\right)^{n+1}}{1-e^{ix}} \\
&= \frac{1-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} \quad \text{[par la formule de Moivre]} \\
&= \frac{\left(e^{-i\frac{n+1}{2}x} - e^{i\frac{n+1}{2}x}\right) e^{i\frac{n+1}{2}x}}{\left(e^{-i\frac{x}{2}} - e^{i\frac{x}{2}}\right) e^{i\frac{x}{2}}} \\
&= \frac{-2i\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right) e^{i\frac{n+1}{2}x}}{-2i\sin\left(\frac{x}{2}\right) e^{i\frac{x}{2}}} \quad \text{[formule d'Euler]} \\
&= \frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{n}{2}x}
\end{aligned}$$

En prenant la partie réelle des expressions obtenues :

- Si $\boxed{x \equiv 0\ [2\pi]}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}(n+1) = \boxed{n+1}$.
- Si $\boxed{x \not\equiv 0\ [2\pi]}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos(kx) = \mathrm{Re}\left(\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} e^{i\frac{n}{2}x}\right) = \boxed{\frac{\sin\left(\frac{n+1}{2}x\right)}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \cos\left(\frac{n}{2}x\right)}$.

2. *Déterminer les racines n-ième d'un nombre complexe (tiré de l'exercice n°15 1. et d'un exemple du cours)*

   (a) Expliciter, sous forme algébrique, les racines carrées de $-8-6i$.

   (b) Déterminer, sous forme trigonométrique, les racines 5-ième de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$.

Preuve :

(a) Pour tout $z = x+iy$ avec $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$z^2 = -8-6i \iff \begin{cases} (x+iy)^2 = -8-6i \\ |x+iy|^2 = |-8-6i| \quad \text{[égalité des modules]} \end{cases} \iff \begin{cases} x^2-y^2 = -8 & \text{[identification des parties réelles]} \\ x^2+y^2 = 10 & \text{[égalité des modules]} \\ 2xy = -6 & \text{[identification des parties imaginaires]} \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 9 \\ xy = -3 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 1 \quad \text{OU} \quad x = -1 \\ y = 3 \quad \text{OU} \quad y = -3 \\ xy = -3 < 0 \quad [x \text{ et } y \text{ sont de signe opposé}] \end{cases}$$

$$\iff (x = 1 \quad \text{ET} \quad y = -3) \quad \text{OU} \quad (x = -1 \quad \text{ET} \quad y = 3)$$

$$\iff z = 1-3i \quad \text{OU} \quad z = -1+3i$$

$\boxed{\text{Les racines de } -8-6i \text{ sont donc } \quad 1-3i \quad , \quad -1+3i}$.

(b) Etant donné que $|\sqrt{2}+i\sqrt{2}| = \sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{2})^2} = \sqrt{4} = 2$ et qu'un argument de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ est donné par $\arctan\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \arctan(1) = \frac{\pi}{4}$, on a $\boxed{\sqrt{2}+i\sqrt{2} = 2e^{i\frac{\pi}{4}}}$.

Une racine 5-ième est donnée par $2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}$ et, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a

$$\begin{aligned} z^5 = \sqrt{2}+i\sqrt{2} &\iff z^5 = 2e^{i\frac{\pi}{4}} \\ &\iff z^5 = \left(2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right)^5 \\ &\iff \left(\frac{z}{2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}}\right)^5 = 1 \\ &\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ \frac{z}{2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}} = \left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k \\ &\iff \exists k \in [\![0;4]\!],\ z = \left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)^k \end{aligned}$$

Les racines 5-ième de $\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ sont donc :

$$\boxed{2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}} \ ; \ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{2\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{i\frac{9\pi}{20}}} \ ; \ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{4\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{i\frac{17\pi}{20}}} \ ; \ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{6\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{-i\frac{3\pi}{4}}} \ ; \ \underbrace{\left[2^{1/5}e^{i\frac{\pi}{20}}\right]\left(e^{i\frac{8\pi}{5}}\right)}_{2^{1/5}e^{-i\frac{7\pi}{20}}}}$$

3. *Intégrale d'une fonction rationnelle (tirée du TD5 exercice n°3)*

Faire l'une des deux questions suivantes (au choix de l'examinateur) :

- $\star$ Etudier l'existence, en fonction de x, de l'intégrale $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}} \, \mathrm{dt}$, puis la calculer.
- $\star$ Etudier l'existence, en fonction de x, de l'intégrale $J(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2} \, \mathrm{dt}$, puis la calculer.

Preuve :

- $\star$ Etude de $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}} \, \mathrm{dt}$.

  Le trinôme $t^2 - t + \dfrac{5}{2}$ a pour discriminant $(-1)^2 - 4 \times \dfrac{5}{2} = -9 < 0$.

  On écrit donc ce trinôme sous forme canonique : pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\quad t^2 - t + \dfrac{5}{2} = \left(t - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{9}{4} > 0$.

  Ainsi, la fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}}$ est définie et continue (par opérations) sur $\mathbb{R}$.
  En particulier, pour tout $x \in \mathbb{R}$, f est continue sur $[0; x]$ ($[x; 0]$). La fonction I est donc définie sur $\mathbb{R}$.

  Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}
I(x) = \int_0^x \frac{1}{t^2 - t + \frac{5}{2}} \, \mathrm{dt} &= \int_0^x \frac{1}{\frac{9}{4} + \left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \, \mathrm{dt} \\
&= \frac{4}{9} \int_0^x \frac{1}{1 + \frac{4}{9}\left(t - \frac{1}{2}\right)^2} \, \mathrm{dt} \\
&= \frac{2}{3} \int_0^x \frac{2/3}{1 + \left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)^2} \, \mathrm{dt} \\
&= \frac{2}{3} \left[\arctan\left(\frac{2}{3}t - \frac{1}{3}\right)\right]_0^x \\
&= \frac{2}{3} \left[\arctan\left(\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right].
\end{aligned}$$

- $\star$ Etude de $J(x) = \displaystyle\int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2} \, \mathrm{dt}$.

  Le trinôme $-t^2 + t + 2$ a pour discriminant $1^2 - 4 \times (-1) \times 2 = 9 > 0$ et a pour racines -1 et 2.

  Ainsi, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a la factorisation $-t^2 + t + 2 = -(t+1)(t-2)$.
  La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{-t^2 + t + 2}$ est définie et continue (par opérations) sur $\mathbb{R} \backslash \{-1; 2\}$.
  En particulier, la fonction f est continue sur le segment $[3; x]$ ($[x; 3]$) à condition que $x \in]2; +\infty[$.

  La fonction J est donc définie sur $]2; +\infty[$.

  Pour tout $x \in]2; +\infty[$, on a

$$\begin{aligned}
J(x) = \int_3^x \frac{1}{-t^2 + t + 2} \, \mathrm{dt} &= -\int_3^x \frac{1}{(t+1)(t-2)} \, \mathrm{dt} \\
&= -\int_3^x \left[\frac{-1/3}{t+1} - \frac{-1/3}{t-2}\right] \mathrm{dt} \quad \text{[après décomposition en éléments simples]} \\
&= \frac{1}{3} \int_3^x \left[\frac{1}{t+1} - \frac{1}{t-2}\right] \mathrm{dt} \\
&= \frac{1}{3} \left[\ln|t+1| - \ln|t-2|\right]_3^x \\
&= \frac{1}{3} \left[\ln\left(\frac{t+1}{t-2}\right)\right]_3^x \quad \text{[car, pour } t \text{ entre } 3 \text{ et } x,\ t+1 > 0 \text{ et } t-2 > 0\text{]} \\
&= \frac{1}{3} \ln\left(\frac{x+1}{4(x-2)}\right).
\end{aligned}$$

4. *Résolution d'une EDL d'ordre un sans second membre*

On considère l'équation différentielle $(E) : y'(t) + a(t)y(t) = 0$ où $a : I \to \mathbb{K}$ continue ($\mathbb{K}$ désignant $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Déterminer les solutions de (E) sur I. On raisonnera par analyse-synthèse.

Preuve :

- ⋆ Préliminaires : On sait que la fonction $g : t \mapsto e^{-A(t)}$, où A est une primitive de a sur I (existe car a continue sur I), est une solution de (E). En effet :

$$\forall t \in I, \quad g'(t) = -A'(t)e^{-A(t)} = -a(t)e^{A(t)} = -a(t)g(t).$$

On remarque immédiatement que les fonctions $f_\lambda : t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$, pour $\lambda \in \mathbb{K}$, sont également solutions de (E) car

$$\forall t \in I, \quad f_\lambda'(t) = \lambda \left[\underbrace{-A'(t)}_{=-a(t)} e^{-A(t)}\right] = -a(t)f_\lambda(t).$$

Montrons que ces solutions sont les seules.

- ⋆ Raisonnons par analyse-synthèse :

Analyse : Supposons obtenue une solution f quelconque et étudions les propriétés que doit nécessairement vérifier f.

Etant donné que f est solution, on a : $\forall t \in I, \quad f'(t) \overset{(*)}{=} -a(t)f(t).$ On sait également que g est solution.

Comparons f (non connue) avec g (connue, non nulle car strictement positive).

Pour tout $t \in I$, on pose $h(t) = \dfrac{f(t)}{g(t)} = \dfrac{f(t)}{e^{-A(t)}} = f(t)e^{A(t)}$.

La fonction h est dérivable sur I comme produit de fonctions dérivables sur I et, pour tout $t \in I$, on a

$$\begin{aligned} h'(t) &= f'(t)e^{A(t)} + f(t)\left[A'(t)e^{A(t)}\right] \\ &= -a(t)f(t)e^{A(t)} + f(t)a(t)e^{A(t)} \quad \text{[on a utilisé } (*)\text{]} \\ &= 0. \end{aligned}$$

La fonction h est donc constante sur l'intervalle I et il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que : $\forall t \in I, \quad f(t) = h(t)e^{-A(t)} = \lambda e^{-A(t)}$.

Donc : SI f est solution, elle est obligatoirement de la forme $t \mapsto \lambda e^{-A(t)}$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$.

Synthèse : Réciproquement, on a déjà montré que ces fonctions sont effectivement solutions de (E).

- ⋆ Conclusion : Les solutions de (E) sont exactement les fonctions :

$$t \mapsto \lambda e^{-A(t)} \quad \text{pour } \lambda \text{ décrivant } \mathbb{K}.$$