III Echelonnement-réduction et algorithme du pivot de Gauss-Jordan

2 Présentation de l'algorithme du pivot

L'algorithme du pivot de Gauss-Jordan sert à déterminer la matrice ELR (échelonnée réduite par lignes) associée à une matrice donnée de taille $n \times p$ $(n, p \in \mathbb{N}^\star)$.
Cet algorithme est composé de deux grande étapes : l'étape de « descente »(pendant laquelle on échelonne par lignes la matrice) et l'étape de « remontée »(pendant laquelle on réduit la matrice échelonnée par lignes précédemment obtenue).

- **Etape de « descente » ou échelonnement :**

  On note i l'indice de ligne et j l'indice de colonne. On commence avec $i = 1$ et $j = 1$.

  1. On regarde dans la j-ième colonne s'il y a un coefficient non nul entre la i-ème et la dernière ligne.
     (a) Si non, on augmente j de 1. Si $j > p$ le nombre de colonnes, on s'arrête. Sinon, on retourne à l'étape 1.
     (b) Si oui, on effectue $L_i \leftrightarrow L_k$ (où k est le numéro de la ligne où il y a un coefficient non nul) et on passe à l'étape suivante.
  2. Le coefficient (i, j) (qui est non nul) s'appelle un pivot, on effectue des opérations $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_i$ pour annuler tous les coefficients de la colonne qui sont « en-dessous » du pivot.
  3. On augmente j de 1 et i de 1. Si $j > p$ ou $i > n$, on s'arrête. Sinon on retourne à l'étape 1.

- **Etape de « remontée » ou réduction :**

  On considère la matrice échelonnée obtenue lors de l'étape précédente.
  Soit elle est nulle et est déjà réduite. Soit elle possède au moins un pivot. On se place dans ce dernier cas.

  1. On considère la ligne i contenant le pivot le « plus à droite ». On effectue une opération du type $L_i \leftarrow \dfrac{1}{\lambda} L_i$ pour faire passer la valeur de ce pivot à 1.
  2. On effectue des opérations du type $L_k \leftarrow L_k + \lambda L_i$ pour annuler tous les coefficients de la colonne qui sont « au-dessus » du pivot.
  3. On retourne à l'étape 1 en considérant la ligne contenant le pivot directement à gauche du précédent. Si aucun pivot n'est présent à gauche du dernier considéré, on s'arrête.

Exemple

« Descente » ou Echelonnement

- Par échange de lignes, on amène un coefficient non nul ($\checkmark$) en position $(1, 1)$, ce coefficient devient un pivot.

- A l'aide du pivot, on annule les coefficients de la première colonne.

$$\begin{bmatrix} \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 + \beta L_1}}{\sim}} \begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

- On observe les coefficients de la seconde colonne de numéro de ligne supérieur ou égal à 2, s'ils sont tous nuls, on passe à la colonne suivante :

$$\begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix}$$

- On continue jusqu'à obtenir une matrice échelonnée par lignes :

$$\begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \bullet & \bullet & \bullet \end{bmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \checkmark & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \checkmark & \bullet \end{bmatrix}$$

« Remontée » ou Réduction :

- On fait passer à 1 le pivot le plus à droite, puis on annule les coefficients au-dessus de ce pivot.

$$\begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \checkmark & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & \checkmark & \bullet \end{bmatrix} \underset{L}{\overset{L_3 \leftrightarrow \frac{1}{\lambda} L_3}{\sim}} \begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & \checkmark & \bullet & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix} \underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + \alpha L_3 \\ L_1 \leftarrow L_1 + \beta L_3}}{\sim}} \begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \checkmark & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix}$$

- On continue jusqu'à obtenir une matrice échelonnée réduite par lignes :

$$\begin{bmatrix} \checkmark & \bullet & \bullet & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & \checkmark & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix} \underset{L}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \bullet & 0 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \bullet \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \bullet \end{bmatrix}$$