IV Fonctions circulaires réciproques

c) Présentation de la fonction arccos

- **Définition et continuité :** La fonction cosinus est continue, strictement décroissante sur l'intervalle $[0;\pi]$.
  Le théorème de la bijection nous assure que :
  - ⋆ $\cos_{|[0;\pi]}$ définit une bijection de $[0;\pi]$ sur l'intervalle $[-1;1]$.
    On définit alors :
    $$\boxed{\left(\cos_{|[0;\pi]}\right)^{-1} \overset{\text{déf.}}{=} \arccos}$$
  - ⋆ $\boxed{\text{La fonction } \arccos : [-1;1] \longrightarrow [0;\pi] \text{ est continue et strictement décroissante}}$.
- **Dérivabilité et dérivée :** La fonction cosinus est dérivable sur $[0;\pi]$ et :
  $\forall x \in [0;\pi], \quad \cos'(x) = 0 \Longleftrightarrow -\sin(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ OU } x = \pi.$

  Le théorème de dérivabilité de la réciproque nous assure que :
  - ⋆ $\boxed{\arccos \text{ est dérivable sur } [-1;1]\setminus\{\cos(0);\cos(\pi)\} =]-1;1[}$.
  - ⋆ De plus :
  $$\begin{aligned}\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) &= \frac{1}{\cos'(\arccos y)}\\ &= -\frac{1}{\sin(\arccos y)}\\ &\overset{(*)}{=} -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}\end{aligned}$$

  Donc $\boxed{\forall y \in]-1;1[, \quad \arccos'(y) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-y^2}}}$.

  Explications de $(*)$: $\boxed{\text{Pour tout } y \in [-1;1], \quad \sin(\arccos y) = \sqrt{1-y^2}}$.

  En effet, pour $y \in [-1;1]$, on a $\begin{cases} \cos(\arccos y) = y \\ \cos^2(\arccos y) + \sin^2(\arccos y) = 1 \end{cases}$

  d'où $\sin^2(\arccos y) = 1 - y^2$ et $|\sin(\arccos y)| = \sqrt{1-y^2}$.

  Or $\arccos y \in [0;\pi]$, donc $\sin(\arccos y) \geq 0$ et $\sin(\arccos y) = |\sin(\arccos y)| = \sqrt{1-y^2}$.
- **Graphe :**

- **Remarques :**
  - ⋆ $\forall x \in [-1;1], \quad \cos(\arccos x) = x$.
  - ⋆ $\forall x \in [0;\pi], \quad \arccos(\cos x) = x$.
  - ⋆ $\forall x \notin [-1;1], \quad \cos(\arccos x)$ n'existe pas.
  - ⋆ $\forall x \notin [0;\pi], \quad \arccos(\cos x)$ existe mais est différent de x.

    Exemple : $\arccos\left(\cos\left(-\dfrac{13\pi}{7}\right)\right) = \dfrac{\pi}{7}$ car : $\cos\left(\dfrac{\pi}{7}\right) = \cos\left(\dfrac{\pi}{7} - 2\pi\right) = \cos\left(-\dfrac{13\pi}{7}\right)$ et $0 \leq \dfrac{\pi}{7} \leq \pi$.