Méthodes pour résoudre une (in)équation polynomiale, rationnelle

I Plan général de résolution d'une (in)équation

1. On détermine l'ensemble de définition D de l'(in)équation, c'est-à-dire l'ensemble des nombres réels pour lesquels toutes les expressions existent.
2. On résout l'(in)équation en raisonnant, le plus souvent, par équivalences.
3. On conclut en conservant uniquement les (éventuelles) valeurs se trouvant dans D.

II Comment réaliser le point 2. ?

- **Pour les équations**

Lorsque l'équation à résoudre n'est pas d'un type usuel (affine, du second degré), on utilise les résultats suivants afin de s'y ramener :

Th. Soient $A, B \in \mathbb{R}$.

(i) **Equation produit nul :** $A \times B = 0 \iff A = 0 \boxed{\text{ou}} B = 0$

(ii) **Equation quotient nul :** $B \neq 0 \boxed{\text{et}} \dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$

Méthode pour résoudre une équation, on pourra

1. se ramener à un membre nul ($\square = \bigstar \iff \square - \bigstar = 0$)
2. se ramener à une équation produit nul en $\boxed{\text{factorisant}}$
   ou à une équation quotient nul en $\boxed{\text{réduisant au même dénominateur (RMD)}}$
3. utiliser le théorème précédent pour conclure

Exemple n°1 : équation produit nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(E_1)\ :\ 3(x+1)(x+3) = (x+3)^2$.

1. Ensemble de définition $D_{(E_1)} = \mathbb{R}$.
2. Soit $x \in D_{(E_1)}$. On a :

$$\begin{aligned}
3(x+1)(x+3) = (x+3)^2 &\iff 3(x+1)(x+3) - (x+3)^2 = 0 \quad \text{[membre nul]}\\
&\iff (x+3)\left[3(x+1) - (x+3)\right] = 0 \quad \text{[factorisation]}\\
&\iff (x+3)\left[2x\right] = 0\\
&\iff x+3 = 0 \boxed{\text{ou}} 2x = 0 \quad \text{[équation produit nul]}\\
&\iff x = -3 \boxed{\text{ou}} x = 0.
\end{aligned}$$

3. Comme $-3, 0 \in D_{(E_1)}$, les solutions de (E_1) sont -3 et 0.

Exemple n°2 : équation quotient nul

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(E_2)\ :\ \dfrac{2x+1}{x-1} = 1$.

1. Ensemble de définition $D_{(E_2)} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Soit $x \in D_{(E_2)}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-1} = 1 &\iff \frac{2x+1}{x-1} - 1 = 0 \quad \text{[membre nul]}\\
&\iff \frac{2x+1-(x-1)}{x-1} = 0 \quad \text{[RMD]}\\
&\iff \frac{x+2}{x-1} = 0\\
&\iff x+2 = 0 \quad \text{[équation quotient nul]}\\
&\iff x = -2.
\end{aligned}$$

3. Comme $-2 \in D_{(E_2)}$, l'unique solution de (E_2) est -2.

- **Pour les inéquations**

Méthode pour résoudre une inéquation, on pourra

1. se ramener à un membre nul ($\square \geq \bigstar \iff \square - \bigstar \geq 0$)
2. se ramener à une inéquation faisant apparaître un produit en $\boxed{\text{factorisant}}$
   ou à une inéquation faisant apparaître un quotient en $\boxed{\text{réduisant au même dénominateur (RMD)}}$
3. déterminer le signe du produit ou du quotient obtenu en réalisant un tableau de signe (on utilisera la règle des signes pour remplir le tableau)
4. lire les solutions (éventuelles) de l'inéquation dans le tableau de signes et conclure

Exemple n°1 : inéquation produit

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(I_1)\ :\ 3(x+1)(x+3) \geq (x+3)^2$.

1. Ensemble de définition $D_{(I_1)} = \mathbb{R}$.
2. Soit $x \in D_{(I_1)}$. On a :

$$\begin{aligned} 3(x+1)(x+3) \geq (x+3)^2 &\iff 3(x+1)(x+3) - (x+3)^2 \geq 0 \quad \text{[membre nul]} \\ &\iff (x+3)\left[3(x+1) - (x+3)\right] \geq 0 \quad \text{[factorisation]} \\ &\iff (x+3)\left[2x\right] \geq 0 \end{aligned}$$

On détermine le signe de $(x+3)(2x)$ pour $x \in D_{(I_1)}$:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+3)(2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

3. Donc l'ensemble des solutions de (I_1) est $]-\infty;-3] \cup [0;+\infty[$.

Exemple n°2 : inéquation quotient

Résoudre dans $\mathbb{R}$, $(I_2)\ :\ \dfrac{2x+1}{x-1} < 1$.

1. Ensemble de définition $D_{(I_2)} = \mathbb{R}\backslash\{1\}$.
2. Soit $x \in D_{(I_2)}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} < 1 &\iff \frac{2x+1}{x-1} - 1 < 0 \quad \text{[membre nul]} \\ &\iff \frac{2x+1-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \text{[RMD]} \\ &\iff \frac{x+2}{x-1} < 0 \end{aligned}$$

On détermine le signe de $\dfrac{x+2}{x-1}$ pour $x \in D_{(I_2)}$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

3. Donc l'ensemble des solutions de (I_2) est $]-2;1[$.