Méthodes pour résoudre une (in)équation polynomiale, rationnelle

On considère deux fonctions f et g définies sur un intervalle I et on souhaite résoudre sur I l'équation $f(x) = g(x)$ ou l'inéquation $f(x) \leq g(x)$.

- **Pour l'équation** $f(x) = g(x)$ **d'inconnue** $x \in I$

On tente de se ramener au résultat suivant :

Th. Soient $A, B \in \mathbb{R}$.

(i) **Equation produit nul :** $A \times B = 0 \iff A = 0$ $\boxed{\text{ou}}$ $B = 0$

(ii) **Equation quotient nul :** $B \neq 0$ $\boxed{\text{et}}$ $\dfrac{A}{B} = 0 \iff A = 0$

Méthode pour résoudre une équation, on pourra

1. se ramener à un membre nul ($f(x) = g(x) \iff f(x) - g(x) = 0$)
2. se ramener à une équation produit nul en $\boxed{\text{factorisant}}$
   ou à une équation quotient nul en $\boxed{\text{réduisant au même dénominateur (RMD)}}$
3. utiliser le théorème précédent pour déterminer les solutions recherchées

Exemple n°1 : équation produit nul

Résoudre (E_1) : $3(x+1)(x+3) = (x+3)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
3(x+1)(x+3) = (x+3)^2 &\iff 3(x+1)(x+3) - (x+3)^2 = 0 \quad \text{[membre nul]} \\
&\iff (x+3)\left[3(x+1) - (x+3)\right] = 0 \quad \text{[factorisation]} \\
&\iff (x+3)\left[2x\right] = 0 \\
&\iff x+3 = 0 \; \boxed{\text{ou}} \; 2x = 0 \quad \text{[équation produit nul]} \\
&\iff x = -3 \; \boxed{\text{ou}} \; x = 0.
\end{aligned}$$

2. Les solutions de (E_1) sont -3 et 0.

Exemple n°2 : équation quotient nul

Résoudre (E_2) : $\dfrac{2x+1}{x-1} = 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{2x+1}{x-1} = 1 &\iff \frac{2x+1}{x-1} - 1 = 0 \quad \text{[membre nul]} \\
&\iff \frac{2x+1-(x-1)}{x-1} = 0 \quad \text{[RMD]} \\
&\iff \frac{x+2}{x-1} = 0 \\
&\iff x+2 = 0 \quad \text{[équation quotient nul]} \\
&\iff x = -2.
\end{aligned}$$

2. L'unique solution de (E_2) est -2.

- **Pour l'inéquation $f(x) \leq g(x)$ d'inconnue $x \in I$**

Méthode pour résoudre une inéquation, on pourra

1. se ramener à un membre nul ($f(x) \geq g(x) \iff f(x) - g(x) \geq 0$)
2. se ramener à une inéquation faisant apparaître un produit en $\boxed{\text{factorisant}}$
   ou à une inéquation faisant apparaître un quotient en $\boxed{\text{réduisant au même dénominateur (RMD)}}$
3. déterminer le signe du produit ou du quotient obtenu en réalisant un tableau de signe (on utilisera la règle des signes pour remplir le tableau)
4. lire les solutions (éventuelles) de l'inéquation dans le tableau de signes et conclure

Exemple n°1 : inéquation produit

Résoudre (I_1) : $3(x+1)(x+3) \geq (x+3)^2$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 3(x+1)(x+3) \geq (x+3)^2 &\iff 3(x+1)(x+3) - (x+3)^2 \geq 0 \quad \text{[membre nul]} \\ &\iff (x+3)\left[3(x+1) - (x+3)\right] \geq 0 \quad \text{[factorisation]} \\ &\iff (x+3)\left[2x\right] \geq 0 \end{aligned}$$

On détermine le signe de $(x+3)(2x)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$2x$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+3)(2x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

2. Donc l'ensemble des solutions de (I_1) est $]-\infty;-3] \cup [0;+\infty[$.

Exemple n°2 : inéquation quotient

Résoudre (I_2) : $\dfrac{2x+1}{x-1} < 1$ d'inconnue $x \in \mathbb{R} - \{1\}$.

1. Soit $x \in \mathbb{R} - \{1\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{2x+1}{x-1} < 1 &\iff \frac{2x+1}{x-1} - 1 < 0 \quad \text{[membre nul]} \\ &\iff \frac{2x+1-(x-1)}{x-1} < 0 \quad \text{[RMD]} \\ &\iff \frac{x+2}{x-1} < 0 \end{aligned}$$

On détermine le signe de $\dfrac{x+2}{x-1}$ pour $x \in \mathbb{R} - \{1\}$:

x	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-1$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$\dfrac{x+2}{x-1}$		$+$	0	$-$	||	$+$	

2. Donc l'ensemble des solutions de (I_2) est $]-2;1[$.