Primitives des fonctions usuelles

Primitives usuelles à connaître :

Image de x par la fonction	**Image de x par une primitive**	**Intervalle**
$x^\alpha = e^{\alpha \ln x}$, $\alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\dfrac{1}{x}$	$\begin{cases} \ln(\lvert x\rvert) + C_1 = \ln(x) + C_1 \\ \ln(\lvert x\rvert) + C_2 = \ln(-x) + C_2 \end{cases}$	$\begin{cases}]0, +\infty[\\ ]-\infty, 0[\end{cases}$
$e^{\lambda x}$, $\lambda \neq 0$	$\frac{1}{\lambda} e^{\lambda x} + C$	$\mathbb{R}$
$\sin(\omega x)$	$-\frac{1}{\omega}\cos(\omega x) + C$	$\mathbb{R}$
$\cos(\omega x)$	$\frac{1}{\omega}\sin(\omega x) + C$	$\mathbb{R}$
$\tan(x) = \frac{\sin x}{\cos x}$	$-\ln\lvert\cos x\rvert + C$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan(x) + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin(x) + C$	$]-1, 1[$
$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arccos(x) + C$	$]-1, 1[$
$\frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$	$\tan(x) + C$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$

Dérivées de fonctions composées et primitives associées :

Fonctions	**Primitives**	**Intervalle**
$u' \times u^\alpha$, $\alpha \neq -1$	$\frac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$	$\mathbb{R}_+^*$
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert + C$	$\mathbb{R}_+^*$ ou $\mathbb{R}_-^*$
$u' \times e^u$	$e^u + C$	$\mathbb{R}$
$u' \times \sin u$	$-\cos u + C$	$\mathbb{R}$
$u' \times \cos u$	$\sin u + C$	$\mathbb{R}$
$u' \times \tan u$	$-\ln(\lvert\cos(u)\rvert) + C$	$\mathbb{R} - \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$
$\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arcsin u + C$	$]-1, 1[$
$-\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$	$\arccos u + C$	$]-1, 1[$
$\frac{u'}{1+u^2}$	$\arctan u + C$	$\mathbb{R}$
$\frac{u'}{a^2+u^2}$	$\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{u}{a}\right) + C$	$\mathbb{R}$

Quelques nouvelles méthodes pour calculer des primitives

- Primitives de fonctions du type $t \mapsto e^{at}\cos(bt)$ ou $t \mapsto e^{at}\sin(bt)$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

Méthode :

1. On écrit $e^{at}\cos(bt) = e^{at}\text{Re}\left(e^{ibt}\right) = \text{Re}\left(e^{(a+ib)t}\right)$
   ou encore $e^{at}\sin(bt) = e^{at}\text{Im}\left(e^{ibt}\right) = \text{Im}\left(e^{(a+ib)t}\right)$.
2. On détermine les primitives de $t \mapsto e^{(a+ib)t}$, qui sont $t \mapsto \dfrac{1}{a+ib}e^{(a+ib)t} + C$.
3. On prend la partie réelle (ou imaginaire) de la primitive obtenue.

- Primitives de fonctions du type $t \mapsto \cos^p(t)\sin^q(t)$ avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Méthode :

1. On linéarise $t \mapsto \cos^p(t)\sin^q(t)$.
2. On détermine les primitives de la fonction linéarisée.

- Primitives de fonctions rationnelles du type $f : t \mapsto \dfrac{1}{at^2 + bt + c}$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$.

Méthode :

⋆ Si $\boxed{b^2 - 4ac > 0}$:

1. On factorise $at^2 + bt + c = a(t - r_1)(t - r_2)$.
2. On effectue une décomposition en éléments simples :

$$\frac{1}{at^2 + bt + c} = \frac{1}{a(t - r_1)(t - r_2)} = \lambda\left(\frac{1}{t - r_1} - \frac{1}{t - r_2}\right).$$

⋆ On détermine les primitives de f sur un intervalle ne contenant ni r_1, ni r_2.

⋆ Si $\boxed{b^2 - 4ac = 0}$:

1. On factorise $at^2 + bt + c = a(t - r_0)^2$.
2. On détermine directement les primitives de $\dfrac{1}{a}\dfrac{1}{(t - r_0)^2}$ sur un intervalle ne contenant par r_0.

⋆ Si $\boxed{b^2 - 4ac < 0}$:

1. On met $at^2 + bt + c$ sous forme canonique : $a\left[(t-\alpha)^2 + (\sqrt{\beta})^2\right]$.
2. On écrit f sous la forme

$$\frac{1}{at^2 + bt + c} = \frac{1}{a\left[(\sqrt{\beta})^2 + (t-\alpha)^2\right]} = \frac{1}{a\sqrt{\beta}}\frac{1/\sqrt{\beta}}{1 + \left(\frac{t-a}{\sqrt{\beta}}\right)^2}$$

3. On reconnaît une fonction de la forme $\lambda\dfrac{u'}{1+u^2}$ qui est la dérivée de la composée $\lambda\arctan(u)$ et on en déduit les primitives de f sur $\mathbb{R}$.