Travail estival ECG1 2021/2022

Mathématiques appliquées

Pour me contacter :

- Pour toute question, vous pouvez me contacter (y compris pendant les vacances) à l'adresse : blancmathematiques@gmail.com
- La page web consacrée au cours de mathématiques est : `http://tblanc.fr`

Vous allez intégrer en septembre la classe de ECG1. Félicitations !

Vous aurez 8 heures de mathématiques par semaine et une heure d'informatique. Le programme est chargé, le rythme des cours et la quantité de travail à fournir **tout au long de l'année** seront plus important qu'au lycée.

Dès lors, vos vacances doivent, avant tout, être **reposante !** Cela dit, il est également indispensable d'avoir **préparé la rentrée**. Il ne faut pas passer plus de 1h - 1h30 par jour sur les contenus. Il est par contre nécessaire que ce travail soit fait **régulièrement**. A cette fin, je vous propose un programme de travail progressif.

- Vous aurez deux axes de travail distincts mais complémentaires :
  - **Travailler le calcul algébrique de base : pages 2 à 5**
    Si les mathématiques ne se résument pas à réaliser des calculs, on ne peut pas en faire à un niveau élevé sans être à l'aise sur les manipulations élémentaires.
    La première partie de votre travail consistera donc à (re)travailler les manipulations algébriques de base : fractions, puissances, racines carrées, identités remarquables etc.
    Proposition d'organisation :
    * du 26 juillet au 1 août : travailler sur les fractions, les puissances et les racines carrées ;
    * du 2 août au 8 août : travailler sur les identités remarquables, les équations/inéquations et polynôme du second degré.

    Les corrections de ces exercices seront mises en ligne sur la page web du cours chaque fin de semaine.
  - **Travailler sur des thèmes de première et terminale : pages 6 à 8**
    Le programme de mathématiques appliquées en ECG se situe dans la lignée des programmes de Première générale (**spécialité mathématiques**) et de Terminale générale (**option mathématiques complémentaires**).
    La seconde partie de votre travail consistera à reprendre quelques points de ces programmes.
    Proposition d'organisation :
    * du 9 août au 15 août : travailler sur le thème des fonctions ;
    * du 16 août au 22 août : travailler sur le thème des suites ;
    * du 23 août au 29 août : travailler sur le thème des probabilités.

    Les corrections de ces exercices seront mises en ligne sur la page web du cours chaque fin de semaine.
- **La calculatrice est interdite aux concours. Elle ne pourra donc plus vous servir d'aide mémoire ou faire les calculs de base à votre place ! Vous devez impérativement apprendre à vous en passer et ne l'utiliser que pour vérifier vos calculs.**

Bon courage à tous, et bonnes vacances,

Thomas BLANC

1. Première partie du travail : le calcul algébrique

Notations des ensembles usuels de nombres

- $\mathbb{N}$ est l'ensemble des *entiers naturels* : $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{Z}$ est l'ensemble des *entiers relatifs* : $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{D}$ est l'ensemble des *nombres décimaux*. C'est l'ensemble des nombres admettant une écriture décimale **finie**. Par exemple : $6,2$ et $\dfrac{1}{4} = 0,25$ sont dans $\mathbb{D}$, mais pas $\dfrac{1}{3} = 0,33333\ldots$
- $\mathbb{Q}$ est l'ensemble des *nombres rationnels*. C'est l'ensemble des nombres pouvant s'écrire sous la forme $\dfrac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^\star$. Les nombres π, e, $\sqrt{2}$ ne sont pas rationnels, on dit qu'ils sont *irrationnels*.
- $\mathbb{R}$ est l'ensemble des *nombres réels* regroupant les nombres rationnels et irrationnels.
  C'est l'ensemble usuel de nombres avec lequel on travaillera le plus souvent.
- Tout ensemble de nombre que l'on prive de 0 sera noté avec $\star$, comme $\mathbb{N}^\star$ et $\mathbb{R}^\star$.
  Considérer les nombres positifs d'un ensemble se notera avec un $+$, comme $\mathbb{R}_+$.
  On peut combiner ces deux écritures, par exemple l'ensemble des nombres réels strictement positifs, c'est-à-dire positifs et différents de 0, se note $\mathbb{R}_+^\star$.

(a) Manipulation des fractions

Règles de manipulation des fractions :

Soient a, b, c, d des nombres réels tels que $b \neq 0$, $d \neq 0$ ($a \neq 0$ ou $c \neq 0$ si nécessaire).

(i) $\dfrac{a}{b} \times \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$ (ii) $\dfrac{a \times \cancel{d}}{b \times \cancel{d}} = \dfrac{a}{b}$ (iii) $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + bc}{bd}$

(iv) $\dfrac{a}{\frac{b}{d}} = \dfrac{ad}{b}$ (v) $\dfrac{\frac{a}{b}}{d} = \dfrac{a}{bd}$ (vi) $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \dfrac{ad}{bc}$

Remarque : On rappelle que : $b^{-1} = \dfrac{1}{b}$.

Exercice n°1 Simplifications de fractions

Simplifier "au maximum" les fractions suivantes :

$A = \dfrac{5}{7} \times \dfrac{21}{25}$, $B = \dfrac{3}{\frac{2}{3}}$, $C = \dfrac{\frac{3}{2}}{3}$, $D = \dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{7}$, $E = \dfrac{1}{12} - \dfrac{1}{8}$, $F = \dfrac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{5}}$, $G = -\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{9}{7} - \dfrac{1}{8}\right)$,

$H = \dfrac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}}$

Exercice n°2 Simplifications de fractions faisant intervenir une variable

Soit n un nombre entier naturel non nul. Peut-on simplifier les fractions suivantes ?
Si oui, faire la simplification.

$A = \dfrac{n+2}{5n+10}$, $B = \dfrac{n+2}{n+4}$, $C = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{2}{3} \times \dfrac{3}{4} \times \ldots \times \dfrac{n-1}{n}$

(b) Manipulation des puissances

Règles de manipulation des puissances :

Soient a et b des nombres réels ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$ si nécessaire) et m, n des nombres entiers relatifs.

(i) $a^{m+n} = a^m a^n$ (ii) $(a^m)^n = a^{mn}$ (iii) $(a \times b)^n = a^n b^n$ (iv) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$

Remarque : On rappelle que : $b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}$.

Exercice n°3 Réécriture d'expressions avec des puissances

Ecrire les expressions suivantes comme des produits de puissances de 2, 3 et 5 :

$$A = \frac{5^3}{25}, \quad B = 2^3 \times 4^5 \times 8^{-1}, \quad C = \frac{1000}{5^4 \times 2^6}, \quad D = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(9^{-1} \times 2^3)^3}, \quad E = \frac{\dfrac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}}{\dfrac{10^2 \times 2}{5^8}}$$

(c) Manipulation de racines carrées

Soit x est un nombre réel positif. On appelle *la racine carrée* de x l'unique nombre réel positif a vérifiant $a^2 = x$, on le note $a = \sqrt{x}$. Ainsi $\left(\sqrt{x}\right)^2 = x$.

Règles de manipulation des racines carrées :

Soient a et b des nombres réels positifs ($b \neq 0$ ou $a \neq 0$ si nécessaire)

(i) $\sqrt{a\,b} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ (ii) $\sqrt{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ (iii) $\dfrac{\sqrt{b}}{b} = \dfrac{1}{\sqrt{b}}$ (iv) $\dfrac{b}{\sqrt{b}} = \sqrt{b}$

Remarque : On rappelle que : $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{a}$.

Exercice n°4 Simplifications de racines carrées

Simplifier les expression suivantes. Le dénominateur ne comportera plus de radical $\sqrt{\ }$.

$$A = \sqrt{20}, \quad B = \sqrt{75} + \sqrt{45}, \quad C = \frac{4}{\sqrt{8}}, \quad D = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{42}}{\sqrt{3} \times \sqrt{56}}, \quad \text{pour } x \in \mathbb{R},\ E = \sqrt{x^2}.$$

(d) Les identités remarquables

Les trois identités remarquables de base :

Soient a, b et c des nombres réels.

(i) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ii) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (iii) $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

Ces identités servent à développer et à factoriser des expressions.

Exercice n°5 Développement et factorisation avec les identités remarquables

1. A l'aide des identités remarquables, simplifier les expressions suivantes où x, y désignent des réels.

$$A = (x-y)^2 + (x+y)^2, \quad B = (x+y)^2 - (x-y)^2, \quad C = \left(2+\sqrt{5}\right) \times \left(2-\sqrt{5}\right), \quad D = \frac{\left(\sqrt{2}+2\right)^2}{3},$$
$$E = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}}.$$

2. Factoriser "au maximum" les expressions suivantes en utilisant une identité remarquable ou pas :

$$A = x^2 + 5x, \quad B = (3x-2)(x+2) - (x+2)^2, \quad C = 4 + 4x + x^2, \quad D = 1 - x^2, \quad E = 3x - 2x^3.$$

Méthode de la quantité conjuguée :

- Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. La quantité conjugué à $\sqrt{a} - \sqrt{b}$ est $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ et vice-versa.
- Cette méthode permet de réécrire certaines expressions qui mettent en jeu des racines carrées.
  Par exemple, on considère le quotient $\dfrac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}$. On multiplie et on divise par la quantité conjuguée associée au dénominateur (i.e. $\sqrt{6}+\sqrt{2}$) afin de faire apparaître l'identité remarquable $(a-b)(a+b)$, on obtient :

$$\frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{6}-\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}+\sqrt{2}} = \frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)} = \frac{4\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)}{\left(\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{6}+\sqrt{2}.$$

Exercice n°6 Utiliser la quantité conjuguée

Réécrire les expressions suivantes. Le dénominateur ne comportera plus de radical $\sqrt{\ }$.

$A = \dfrac{2}{\sqrt{5}-1}$, $\quad B = \dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}$.

(e) Mises au point sur les équations et les inéquations

- **Règle du produit nul**

Un produit de deux réels est nul si et seulement si l'un des facteurs est nul.
Autrement dit, pour tous nombres réels a et b,

$$a \times b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \text{ OU } b = 0$$

- **Résolution d'équations**

Une méthode pour résoudre une équation réelle :

Se ramener à $A = 0$, **FACTORISER** l'expression A et utiliser la règle du produit nul.

- **Règle des signes**

Si on connaît le signe des réels a et b, la règle des signes nous donne le signe de $a \times b$ et $\dfrac{a}{b}$.

A priori, on ne connaît le signe de $a + b$ que dans le cas où a et b sont de <u>même signe</u>.

- **Résolution d'inéquations**

Une méthode pour résoudre une inéquation réelle :

Se ramener à $A \geq 0$ (ou $A \leq 0$), **FACTORISER** l'expression A et utiliser la règle des signes.

Exercice n°7 Résolutions d'équations et d'inéquations

1. Résoudre les équations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$(A):\ 3x+5 = -2x+1$, $\quad (B):\ x+2-(2x+1) = -x+7$, $\quad (C):\ (3x+5)(6x-4) = 0$, $\quad (D):\ x^2-4 = 0$

$(E):\ \dfrac{x-1}{2x+1} = 1$

2. Résoudre les inéquations d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ suivantes :

$(A):\ 2x-5 \leq x-9$, $\quad (B):\ (x+1)(x-5) \geq 0$, $\quad (C):\ x^2+3x \leq 0$, $\quad (D):\ \dfrac{x-1}{2x+1} \leq 1$, $\quad (E):\ 4x^2-1 \geq 0$

(f) Racines et factorisation d'un trinôme du second degré

Factorisation d'un trinôme du second degré :
Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère le trinôme de degré deux $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On note Δ le réel $b^2 - 4ac$, on l'appelle le *discriminant* de P.
Un réel r est une *racine* de P si et seulement si $P(r) = ar^2 + br + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ alors P possède **deux racines réelles distinctes**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Factorisation : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$ alors P possède **une unique racine réelle** appelée "racine double"

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Factorisation : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

- Si $\Delta < 0$ alors P ne possède pas de racines réelles.

Factorisation : P ne peut pas se factoriser comme un produit de deux polynômes de degré un à coefficients réels.

Exercice n°8 Factorisation et signe d'un trinôme de degré deux
Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. On considère le trinôme du second degré : $P(x) = -2x^2 + 12x - 18$.
   (a) Donner, si possible, l'expression factorisée de P.
   (b) Déterminer le signe de $P(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. On considère le trinôme du second degré : $Q(x) = x^2 + 2x - 2$.
   (a) Donner, si possible, l'expression factorisée de Q.
   (b) Déterminer le signe de $Q(x)$ sur $\mathbb{R}$.
3. On considère le trinôme du second degré : $R(x) = x^2 + x + 1$.
   (a) Donner, si possible, l'expression factorisée de R.
   (b) Déterminer le signe de $R(x)$ sur $\mathbb{R}$.

2. Seconde partie du travail : exercices sur des thèmes de lycée

Ces exercices sont axées sur trois points du programme de terminale :
les études de fonctions, les études de suites et les probabilités.

Le programme de référence : **Lien du programme de l'option mathématiques complémentaires**

(a) Fonctions numériques

Les points du programme (lien de téléchargement ci-dessus) à retravailler :

- Contenus et capacités page 17 (Fonctions : continuité, dérivabilité, limites, représentation graphique)
- Contenus et capacités page 19 (Fonctions convexes, Intégration)

Exercice n°9 Quelques calculs de dérivées

Pour chacune des fonctions suivantes, calculer la dérivée sur l'ensemble donné.

1. $f(x) = \sqrt{x} + \dfrac{1}{x}$ pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
2. $f(x) = x\ln(x)$ pour $x \in \mathbb{R}_+^\star$.
3. $f(x) = \dfrac{-x}{1-2x}$ pour $x \in \mathbb{R}/\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$.
4. $f(x) = \ln(1-2x)$ pour $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$.
5. $f(x) = e^{x^2-3x+1}$ pour $x \in \mathbb{R}$.
6. $f(x) = \left(e^{-2x} + e^{x}\right)^2$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice n°10 Fonction exponentielle, calculs de limites et intégration

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
On fixe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Résoudre l'équation $f(x) = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. (*factoriser* $f(x)$ *!*)
2. (a) Calculer la limite de f en $-\infty$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   (b) Calculer la limite de f en $+\infty$. (*factoriser* $f(x)$ *!*)
3. Etablir le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de la courbe $\mathscr{C}$. Vous représenterez les tangentes à $\mathscr{C}$ parallèles à l'axe des abscisses et les éventuelles asymptotes.
5. Montrer que la fonction F définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par $F(x) = 2e^x - \dfrac{1}{2}e^{2x}$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.
6. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$. Donner une interprétation géométrique de I.

Exercice n°11 Fonction polynomiale, convexité, équation $f(x) = k$, inéquation $f(x) \leq k$

On considère la fonction f définie par $\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$.
La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.
On fixe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et $+\infty$. Justifier.
2. Etablir le tableau de variation de f.
3. (a) Déterminer, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x)$. Sur quel intervalle f est-elle convexe ? concave ?
   (b) Justifier que le point d'abscisse 0 de $\mathscr{C}$ est un point d'inflexion.
4. Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.
5. Sur un même graphique tracer les courbes $\mathscr{C}$ et T. Vous représenterez les tangentes à $\mathscr{C}$ parallèle à l'axe des abscisses et les éventuelles asymptotes.
6. A l'aide du graphique, conjecturer l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 3$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.
7. A l'aide du graphique, conjecturer le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 4$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$. Justifier cette conjecture en utilisant un théorème de votre cours de terminale.

(b) Les suites numériques

Les points du programme à retravailler :

- Contenus et capacités p.16 (Suites numériques, modèles discrets)
- Dans le programme de première : formule donnant la somme des termes d'une suite géométrique

Exercice n°12 Somme des termes d'une suite géométrique

Soit (a_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $a_n = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$.

Soit (S_n) la suite définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $S_n = a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$.

1. Montrer que (a_n) est géométrique. Donner sa raison et son premier terme.
2. Déterminer la limite de la suite (a_n).
3. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 8 - 6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n$

   (*On utilisera la formule du cours donnant* $1 + q + q^2 + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k$).
4. Déterminer la limite de la suite (S_n).

Exercice n°13 Modèle discret et suite arithmético-géométrique

Un volume constant de 2200 m^3 d'eau est réparti entre deux bassins notés A et B.
L'eau que contient le bassin A étant destinée à rafraîchir un certain dispositif, une circulation est créée entre les deux bassins à l'aide d'un système de pompes.
Le bassin A a une capacité de 1200 m^3. Initialement, il contient 800 m^3 d'eau.
Toutes les 24 heures, 15% du volume d'eau présent dans le bassin B est transféré vers le bassin A alors que 10% du volume d'eau présent dans le bassin A est transféré dans le bassin B.
Pour tout entier $n \geq 1$, on note :

- a_n le volume d'eau en m^3 contenu dans le bassin A le n-ième jour de fonctionnement.
- b_n le volume d'eau en m^3 contenu dans le bassin B le n-ième jour de fonctionnement.

On a donc $a_1 = 800$.

1. (a) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n + b_n = 2200$.
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0,75a_n + 330$.
2. Le plan étant muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité graphique : 1 cm représente 200 m^3), on note $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ les droites d'équations $y = x$ et $y = 0,75x + 330$.
   (a) Représenter graphiquement les droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ ainsi que les 5 premiers termes de la suite (a_n). Conjecturer le comportement de (a_n) lorsque n tend vers $+\infty$.
   (b) On note (u_n) la suite numérique définie, pour tout entier $n \geq 1$, par :
   $$u_n = a_n - 1320.$$
   (i) Montrer que la suite (u_n) est géométrique. Vous préciserez sa raison et son premier terme.
   (ii) En déduire, pour tout entier $n \geq 1$, l'expression de u_n en fonction de n, puis celle de a_n. Démontrer la conjecture réalisée à la question précédente.
   (c) Au bout de combien de jours, conviendra-t-il de stopper la circulation entre les deux bassins pour éviter le débordement du bassin A ?

(c) Probabilités

Les points du programme à retravailler :

- Contenus et capacités p.21 (Lois discrètes)
- Programme de première : Probabilités conditionnelles et indépendance, variables aléatoires réelles

Exercice n°14 Arbre de probabilité, probabilités conditionnelles, variable aléatoire

On pourra utiliser la calculatrice.

Une entreprise produit et commercialise des puces GPS.
Elle dispose de trois centres de productions A, B et C qui produisent respectivement 60%, 25% et 15% des puces électroniques.
Après leur sortie des centres de production, ces puces sont regroupées dans les laboratoires de contrôle qualité, où elles sont testées pour savoir si elles sont commercialisables. L'expérience a montré que 40% des puces sortant du centre de production A, 95% des puces sortant du centre de production B, et 50% des puces sortant du centre de production C sont commercialisables.

1. Un technicien du contrôle qualité prélève une puce au hasard pour lui faire passer le test.
   On notera les événements suivants :
   - A : "La puce est issue du centre de production A", de même pour B et C.
   - T : "La puce prélevée est commercialisable".

   (a) Décrire la situation par un arbre de probabilité.
   (b) Quelle est la probabilité de l'événement $B \cap \overline{T}$?
   (c) Déterminer la probabilité que la puce prélevée soit commercialisable.
   (d) Sachant que la puce prélevée est commercialisable, quelle est la probabilité qu'elle provienne du centre B ? Donner l'arrondie au centième près.

2. Pour faire les tests, les techniciens reçoivent les puces par lots de 6. On note X la variable aléatoire qui à un lot choisi au hasard associe le nombre de puces commercialisables qu'il contient.
   On donnera l'arrondie au centième près des résultats obtenus.

   (a) Donner la loi de probabilité que suit la variable aléatoire X en justifiant votre réponse.
   (b) Donner l'espérance et l'écart-type de cette variable aléatoire.
   (c) Calculer la probabilité qu'au moins une pièce du lot ne soit pas commercialisable.
   (d) On envisage de modifier le nombre de puces des lots. Déterminer la taille minimale des lots pour que la probabilité qu'un lot pris au hasard contienne au moins une puce non commercialisable soit supérieure à $0,99$.