Éléments de correction

1. Première partie du travail : le calcul algébrique

(a) Manipulation des fractions

Exercice n°1 Simplifications de fractions

$A = \frac{5}{7} \times \frac{21}{25} = \frac{5 \times 21}{7 \times 25} = \frac{5 \times 7 \times 3}{7 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5}$;

$B = \frac{3}{\frac{2}{3}} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2}$;

$C = \frac{\frac{3}{2}}{3} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2}$;

$D = \frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{1 \times 7}{2 \times 7} + \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7+6}{14} = \frac{13}{14}$;

$E = \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{1 \times 2}{12 \times 2} - \frac{1 \times 3}{8 \times 3} = \frac{2-3}{24} = \frac{-1}{24} = -\frac{1}{24}$;

$F = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4+3}{4}}{\frac{5-3}{5}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times 5}{4 \times 2} = \frac{35}{8}$;

$G = -\frac{1}{5}\left(\frac{9}{7} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{5}\left(\frac{9 \times 8}{7 \times 8} - \frac{1 \times 7}{8 \times 7}\right) = -\frac{1}{5} \times \frac{72-7}{56} = -\frac{1}{5} \times \frac{65}{56} = -\frac{1 \times 65}{5 \times 56} = -\frac{5 \times 13}{5 \times 56} = -\frac{13}{56}$;

$H = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2}{2} + \frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}$.

Exercice n°2 Simplifications de fractions faisant intervenir une variable

Soit $n \in \mathbb{N}^\star$.

$A = \frac{n+2}{5n+10} = \frac{n+2}{5 \times (n+2)} = \frac{1}{5}$;

$B = \frac{n+2}{n+4}$. Pas de simplification immédiate, mais peut se réécrire de nombreuses façons intéressantes, méditer les égalités suivantes :

$B = \frac{n+2}{n+4} = \frac{n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \times \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{4}{n}}$ ou encore $B = \frac{n+2}{n+4} = \frac{n+4-2}{n+4} = \frac{n+4}{n+4} - \frac{2}{n+4} = 1 - \frac{2}{n+4}$.

$C = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \ldots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1)}{2 \times 3 \times \ldots \times (n-2) \times (n-1) \times n} = \frac{2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times 1}{2 \times 3 \times \ldots \times (n-1) \times n} = \frac{1}{n}$.

(b) Manipulation des puissances

Exercice n°3 Réécriture d'expressions avec des puissances

$A = \frac{5^3}{25} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$;

$B = 2^3 \times 4^5 \times 8^{-1} = 2^3 \times \left(2^2\right)^5 \times \left(2^3\right)^{-1} = 2^3 \times 2^{2\times 5} \times 2^{3 \times (-1)} = 2^3 \times 2^{10} \times 2^{-3} = 2^{3+10-3} = 2^{10}$;

On a la décomposition $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2^3 \times 5^3$.

$C = \frac{1000}{5^4 \times 2^6} = \frac{2^3 \times 5^3}{2^6 \times 5^4} = \frac{2^3}{2^6} \times \frac{5^3}{5^4} = 2^{3-6} \times 5^{3-4} = 2^{-3} \times 5^{-1}$;

$D = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(9^{-1} \times 2^3)^3} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(9^{-1})^3 \times (2^3)^3} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{9^{-1\times 3} \times 2^{3\times 3}} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{9^{-3} \times 2^9} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(3^2)^{-3} \times 2^9} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{3^{2\times(-3)} \times 2^9} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{3^{-6} \times 2^9} = \frac{3^5}{3^{-6}} \times \frac{2^{-3}}{2^9} = 3^{5-(-6)} \times 2^{-3-9} = 2^{-12} \times 3^{11}$;

$$E=\frac{\frac{2^3\times 5^{-3}}{4\times 25}}{\frac{10^2\times 2}{5^8}}=\frac{2^3\times 5^{-3}}{4\times 25}\times\frac{5^8}{10^2\times 2}=\frac{2^3\times 5^{-3}\times 5^8}{2^2\times 5^2\times(2\times 5)^2\times 2^1}=\frac{2^3\times 5^{-3+8}}{2^2\times 5^2\times 2^2\times 5^2\times 2^1}=\frac{2^3\times 5^5}{2^{2+2+1}\times 5^{2+2}}=$$
$$\frac{2^3\times 5^5}{2^5\times 5^4}=\frac{2^3}{2^5}\times\frac{5^5}{5^4}=2^{3-5}\times 5^{5-4}=2^{-2}\times 5^1.$$

(c) Manipulation de racines carrées

Exercice n°4 Simplifications de racines carrées

$A=\sqrt{20}=\sqrt{2^2\times 5}=\sqrt{2^2}\times\sqrt{5}=2\sqrt{5}$;

$B=\sqrt{75}+\sqrt{45}=\sqrt{25\times 3}+\sqrt{9\times 5}=\sqrt{25}\times\sqrt{3}+\sqrt{9}\times\sqrt{5}=\sqrt{5^2}\times\sqrt{3}+\sqrt{3^2}\times\sqrt{5}=5\sqrt{3}+3\sqrt{5}$;

$C=\dfrac{4}{\sqrt{8}}=\dfrac{4}{\sqrt{4\times 2}}=\dfrac{2\times 2}{2\sqrt{2}}=\dfrac{2}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$;

$D=\dfrac{\sqrt{8}\times\sqrt{42}}{\sqrt{3}\times\sqrt{56}}=\dfrac{\sqrt{4\times 2}\times\sqrt{2\times 3\times 7}}{\sqrt{3}\times\sqrt{4\times 2\times 7}}=\dfrac{\sqrt{4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{7}}{\sqrt{3}\times\sqrt{4}\times\sqrt{2}\times\sqrt{7}}=\sqrt{2}$;

Pour $x\in\mathbb{R}$, $E=\sqrt{x^2}=\begin{cases} x & \text{si } x\geq 0\\ -x & \text{si } x\leq 0\end{cases}=|x|$.

Exemple : pour $x=5\geq 0$, on a $\sqrt{5^2}=\sqrt{25}=5$; mais pour $x=-5\leq 0$, on a $\sqrt{(-5)^2}=\sqrt{25}=5=-(-5)$.

(d) Les identités remarquables

Exercice n°5 Développement et factorisation avec les identités remarquables

1.

$A=(x-y)^2+(x+y)^2=x^2-2xy+y^2+x^2+2xy+y^2=2x^2+2y^2=2(x^2+y^2)$;

- Méthode 1, on développe :

$B=(x+y)^2-(x-y)^2=x^2+2xy+y^2-(x^2-2xy+y^2)=x^2+2xy+y^2-x^2+2xy-y^2=4xy$,

- Méthode 2, on factorise :

$B=(x+y)^2-(x-y)^2=((x+y)-(x-y))\times((x+y)+(x-y))=(x+y-x+y)\times(x+y+x-y)=2y\times 2x=4xy$

$C=\left(2+\sqrt{5}\right)\times\left(2-\sqrt{5}\right)=2^2-\left(\sqrt{5}\right)^2=4-5=-1$;

$D=\dfrac{(\sqrt{2}+2)^2}{3}=\dfrac{(\sqrt{2})^2+2.\sqrt{2}.2+2^2}{3}=\dfrac{2+4\sqrt{2}+4}{3}=\dfrac{6}{3}+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}=2+\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$;

$E=\sqrt{3+2\sqrt{2}}=\sqrt{1+2\sqrt{2}+2}=\sqrt{1^2+2\sqrt{2}+\left(\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2}=1+\sqrt{2}$.

2. $A=x^2+5x=x.x+x.5=x.(x+5)=x(x+5)$;

   $B=(3x-2)(x+2)-(x+2)^2=(3x-2)(x+2)-(x+2)(x+2)=((3x-2)-(x+2))(x+2)=(3x-2-x-2)(x+2)=(2x-4)(x+2)=2(x-2)(x+2)$;

   $C=4+4x+x^2=2^2+2.2.x+x^2=(2+x)^2$;

   $D=1-x^2=1^2-x^2=(1-x)(1+x)$;

   $E=3x-2x^3=3.x-2x^2.x=(3-2x^2).x=2\left(\dfrac{3}{2}-x^2\right)x=2x\left(\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}\right)^2-x^2\right)=2x\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}-x\right)\left(\sqrt{\dfrac{3}{2}}+x\right)$.

Exercice n°6 Utiliser la quantité conjuguée

$A=\dfrac{2}{\sqrt{5}-1}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{\left(\sqrt{5}\right)^2-1^2}=\dfrac{2(\sqrt{5}+1)}{4}=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$;

$B=\dfrac{2+\sqrt{5}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{(2+\sqrt{5})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\dfrac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}{1^2-(\sqrt{3})^2}=\dfrac{2-2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{15}}{-2}$

$=\dfrac{2}{-2}+\dfrac{-2\sqrt{3}}{-2}+\dfrac{\sqrt{5}}{-2}+\dfrac{-\sqrt{15}}{-2}=-1+\sqrt{3}-\dfrac{1}{2}\sqrt{5}+\dfrac{1}{2}\sqrt{15}.$

(e) Mises au point sur les équations et les inéquations

Exercice n°7 Résolutions d'équations et d'inéquations

1.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 3x+5=-2x+1 &\iff 3x+5+2x=-2x+1+2x \\ &\iff 5x+5=1 \\ &\iff 5x+5-5=1-5 \\ &\iff 5x=-4 \\ &\iff \frac{5x}{5}=\frac{-4}{5} \\ &\iff x=\frac{-4}{5} \end{aligned}$$

L'équation (A) possède pour unique solution $-\frac{4}{5}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x+2-(2x+1)=-x+7 &\iff x+2-2x-1=-x+7 \\ &\iff -x+1=-x+7 \\ &\iff 1=7 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant fausse, l'équation (B) ne possède aucune solution.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (3x+5)(6x-4)=0 &\iff 3x+5=0 \quad \text{OU} \quad 6x-4=0 \quad [\text{règle du produit nul}] \\ &\iff 3x=-5 \quad \text{OU} \quad 6x=4 \\ &\iff x=\frac{-5}{3} \quad \text{OU} \quad x=\frac{4}{6}=\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (C) sont $-\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x^2-4=0 &\iff x^2-2^2=0 \\ &\iff (x-2)(x+2)=0 \quad [\text{On factorise l'expression grâce à une identité remarquable}] \\ &\iff x-2=0 \quad \text{OU} \quad x+2=0 \quad [\text{règle du produit nul}] \\ &\iff x=2 \quad \text{OU} \quad x=-2 \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (D) sont 2 et -2.

- Contrairement aux équations précédentes, l'expression présente dans l'équation (E) n'est pas définie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, cette expression est bien définie à condition que le dénominateur ne s'annule pas, ce qui arrive si et seulement si $x \neq -\frac{1}{2}$.

On dit alors que *l'ensemble de définition de l'équation* est $\mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

Dans les équations précédentes, cet ensemble était $\mathbb{R}$.

Soit $x \in \mathbb{R}\setminus\left\{-\frac{1}{2}\right\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x+1}=1 &\iff x-1=2x+1 \quad [2x+1\neq 0] \\ &\iff x=-2 \end{aligned}$$

L'équation (E) possède une unique solution qui est -2.

2.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
  Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 2x-5 \leq x-9 &\Longleftrightarrow 2x-5-x \leq x-9-x \\ &\Longleftrightarrow x-5 \leq -9 \\ &\Longleftrightarrow x-5+5 \leq -9+5 \\ &\Longleftrightarrow x \leq -4 \end{aligned}$$

  L'ensemble des solutions de l'inéquation (A) est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\} =]-\infty\,;-4]$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
  Pour résoudre l'inéquation (B), on cherche à déterminer quand l'expression factorisée du membre de gauche est positive. On peut alors faire appelle à la règle des signes après avoir déterminer le signe de chacun des facteurs.
  On résume cela dans un *tableau de signes* :

x	$-\infty$		-1		5		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$	|	$+$	
$x-5$		$-$	|	$-$	0	$+$	
$(x+1)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (B) est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ OU } 5 \leq x\} =]-\infty\, -1] \cup [5;\, +\infty[$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
  Pour résoudre l'inéquation (B), on tente une approche similaire à l'inéquation précédente. Il faut donc factoriser le membre de gauche.
  Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2+3x \leq 0 \iff x(x+3) \leq 0$.
  Le tableau suivant donne le signe de $x(x+3)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-3		0		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$	|	$+$	
x		$-$	|	$-$	0	$+$	
$x(x+3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (C) est $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\} = [-3;0]$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}\right\}$.

  Soit $x \in \mathbb{R} \backslash \left\{-\frac{1}{2}\right\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{x-1}{2x+1} \leq 1 &\Longleftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} - 1 \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x+1} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{x-1-(2x+1)}{2x+1} \leq 0 \\ &\Longleftrightarrow \frac{-x-2}{2x+1} \leq 0 \end{aligned}$$

  On conclut encore avec un tableau de signes :

x	$-\infty$		-2		$-\frac{1}{2}$		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-2}{2x+1}$		$-$	0	$+$	0	$-$	

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (D) est
$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ OU } -\frac{1}{2} \leq x\} =]-\infty\ -2] \cup \left[-\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R}$.
  On commence par factoriser l'expression $4x^2-1$ pour $x \in \mathbb{R}$ afin de pouvoir utiliser la règle des signes.
  On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4x^2-1 = 4\left(x^2 - \frac{1}{2^2}\right) = 4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ (identité remarquable).
  Le nombre 4 étant positif, le signe de $4\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$ est le signe de $\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$.
  Tableau de signes associé :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$x+\frac{1}{2}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-\frac{1}{2}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

  Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est $\left]-\infty\ -\frac{1}{2}\right] \cup \left[\frac{1}{2};\ +\infty\right[$.

(f) Racines et factorisation d'un trinôme du second degré

Exercice n°8 Factorisation et signe d'un trinôme de degré deux

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Le discriminant de P est $12^2 - 4\times(-2)\times(-18) = 0$. Le trinôme P possède donc une unique racine qui est $\dfrac{-12}{2\times(-2)} = 3$. La forme factorisée de P est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = 2(x-3)^2$.
   (b) On en déduit directement que l'expression $P(x)$ est positive pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. (a) Le discriminant de Q est $2^2 - 4\times 1\times(-2) = 12$ est strictement positif. Le trinôme Q possède donc deux racines réelles distinctes qui sont $\dfrac{-2-\sqrt{12}}{2\times 1} = -1-\sqrt{3}$ et $-1+\sqrt{3}$.
   La forme factorisée de Q est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :
   $Q(x) = \left(x - \left(-1-\sqrt{3}\right)\right)\left(x - \left(-1+\sqrt{3}\right)\right)$.
   (b) L'expression factorisée obtenue permet de déterminer le signe de $Q(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ par un tableau de signe.

x	$-\infty$		$-1-\sqrt{3}$		$-1+\sqrt{3}$		$+\infty$
$x+1+\sqrt{3}$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+1-\sqrt{3}$		$-$		$-$	0	$+$	
$\left(x+1+\sqrt{3}\right)\left(x+1-\sqrt{3}\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Ainsi, $Q(x)$ est positif pour $x \in \left]-\infty; -1-\sqrt{3}\right] \cup \left[-1+\sqrt{3}; +\infty\right[$ et négatif pour $x \in \left[-1-\sqrt{3}; -1+\sqrt{3}\right]$.

3. (a) Le discriminant de R est $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ est strictement négatif. Le trinôme R ne possède aucune racine réelle et ne peut donc être factorisé comme un produit de deux fonctions polynomiales de degré un.

   (b) L'expression $R(x)$ sera strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire R sous forme canonique :

$$R(x) = x^2 + x + 1 = \overbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}^{\geq 0} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

On pourra retenir le résultat suivant concernant le signe d'un trinôme de degré deux :

Factorisation d'un trinôme du second degré :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère le trinôme de degré deux $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On note Δ le réel $b^2 - 4ac$, on l'appelle le *discriminant* de P.

Un réel r est une *racine* de P si et seulement si $P(r) = ar^2 + br + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ alors P possède **deux racines réelles distinctes**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Factorisation : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$ alors P possède **une unique racine réelle** appelée "racine double"

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Factorisation : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

- Si $\Delta < 0$ alors P ne possède pas de racines réelles.

Factorisation : P ne peut pas se factoriser comme un produit de deux polynômes de degré un à coefficients réels.

Signe d'un trinôme du second degré :

Les factorisations précédentes nous assurent que :

- Si $\Delta > 0$ le trinôme est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle délimité par x_1 et x_2, et du signe contraire à celui de a entre les racines.
- Si $\Delta = 0$ le trinôme est du signe de a et s'annule en x_1.
- Si $\Delta < 0$ le trinôme est strictement du signe de a.

2. Seconde partie du travail : exercices sur des thèmes de lycée

Exercice n°9 Quelques calculs de dérivées

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} - \dfrac{1}{x^2} = \dfrac{x\sqrt{x}-2}{2x^2}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^\star$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} = \ln(x) + 1$.
   Dérivée d'un produit de fonction : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R}/\left\{\dfrac{1}{2}\right\}$, $f'(x) = \dfrac{(-1)\times(1-2x)-(-x)\times(-2)}{(1-2x)^2} = \dfrac{-1}{(1-2x)^2}$.
   Dérivée d'un quotient : $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \times v - u \times v}{v^2}$

4. Pour tout $x \in \left]-\infty; \dfrac{1}{2}\right[$, $f'(x) = \dfrac{-2}{1-2x} = \dfrac{2}{2x-1}$. Dérivée de $\ln(u)$: $(\ln(u))' = \dfrac{u'}{u}$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x-3)e^{x^2-3x+1}$. Dérivée de e^u : $(e^u)' = u' \times e^u$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times \left(-2e^{-2x} + e^x\right) \times \left(e^{-2x} + e^x\right)$. Dérivée de u^2 : $\left(u^2\right)' = 2 \times u' \times u$

Exercice n°10 Fonction exponentielle, calculs de limites et intégration

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. On fixe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Rappel : Pour tout $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad e^{x+y} = e^x \times e^y$.
   Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par écrire la factorisation : $f(x) = 2e^x - e^{2x} = 2 \times e^x - e^x \times e^x = e^x(2-e^x)$. Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff e^x(2-e^x) = 0 \\ &\iff e^x = 0 \quad \text{OU} \quad e^x = 2 \\ &\iff e^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2) \end{aligned}$$

   Rappel : On a conclut grâce à la réciprocité des fonctions exponentielle et logarithme népérien : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^\star$, $e^x = y \iff x = \ln(y)$.
   L'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ possède pour unique solution $\ln(2)$.

2. (a) Rappel : $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.
   Ainsi, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} 2x = -\infty$, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{2x} = 0$. Par somme on obtient $\lim\limits_{x \to -\infty} 2e^x - e^{2x} = 0$.
   Rappel : comme $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

   (b) La limite $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x - e^{2x}$, écrit sous cette forme, est indéterminée.
   Rappel : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.
   En effet, $\lim\limits_{x \to +\infty} 2e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x} = +\infty$, c'est donc une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.
   Pour lever une forme indéterminée au voisinage de ∞, on factorise par le terme dominant (qui est ici e^{2x}), ce qui donne :
   pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - e^{2x} = e^{2x}\left(2e^{-x} - 1\right)$.
   Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} -x = -\infty$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} - 1 = -1$. D'où, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{2x}\left(2e^{-x} - 1\right) = -\infty$.

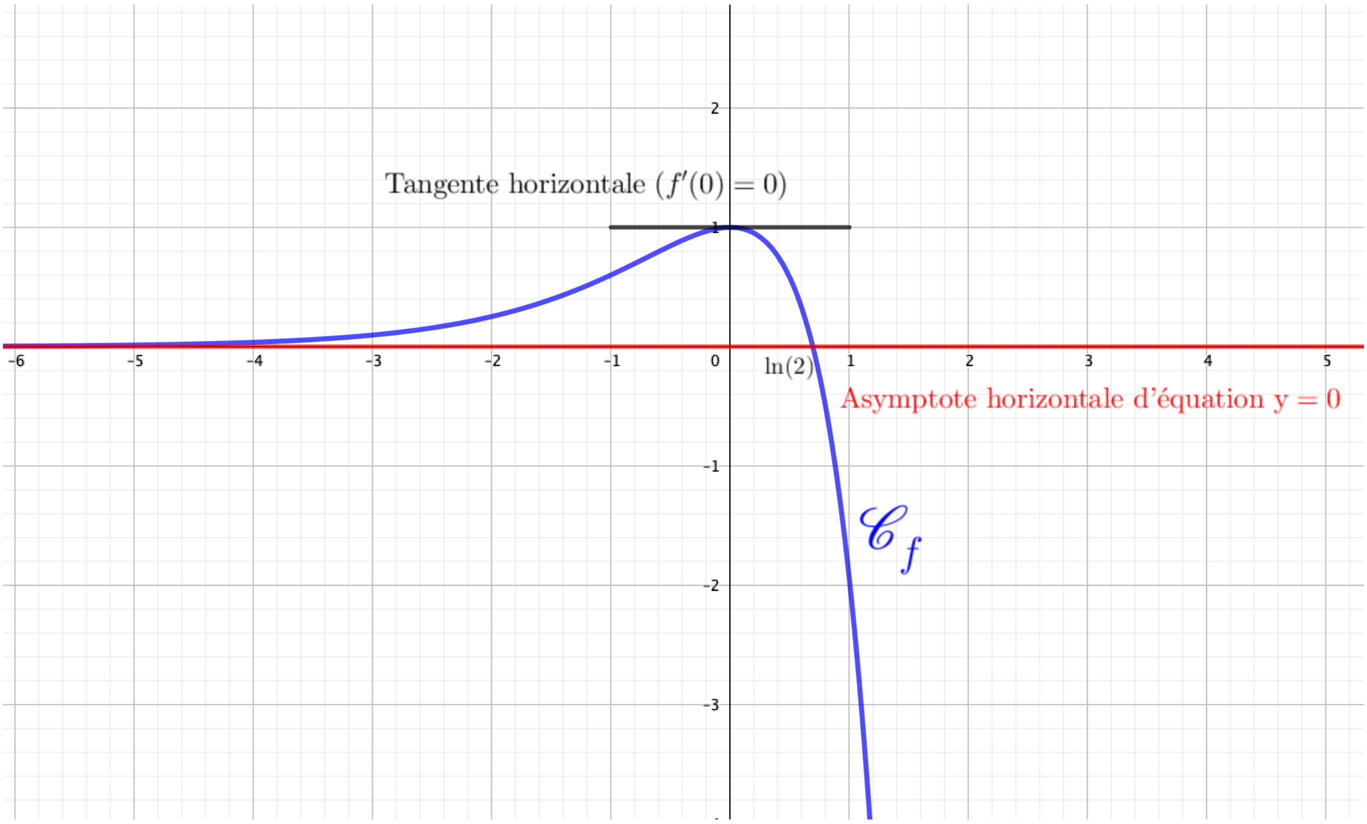
3. On rappelle pourquoi la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$: La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.
   On calcule la dérivée : De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x - 2e^{2x} = 2e^x(1-e^x)$.
   On étudie le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}$: Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de

$1 - e^x$. Il reste donc à étudier le signe de $1 - e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$; pour cela on résout une inéquation, par exemple : $1 - e^x \leq 0$.
Soit $x \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} 1 - e^x \leq 0 &\iff 1 \leq e^x \\ &\iff \ln(1) \leq \ln(e^x) \quad [\text{Par stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^\star] \\ &\iff 0 \leq x \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [0; +\infty[$ et on montrerait de même que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 0]$.
On établit le tableau de variation de f:

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\infty$

4. 

5. La fonction F est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2e^x - \dfrac{1}{2} \times 2 \times e^{2x} = 2e^x - e^{2x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

6. Grâce à la question précédente, on a

$$I = \int_{-1}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_{-1}^{0} = F(0) - F(-1) = \left(2e^0 - \frac{1}{2}e^{2.0}\right) - \left(2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{2.(-1)}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{e} + \frac{1}{2e^2}.$$

Exercice n°11 Fonction polynomiale, convexité, équation $f(x) = k$, inéquation $f(x) \leq k$

On considère la fonction f définie par $f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^3 - 3x + 1 \end{array}$.

La fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale.

On fixe un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et on note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de f dans ce repère.

1. La limite en $+\infty$ comme en $-\infty$ sont des formes indéterminée du type $\infty - \infty$. Comme dans l'exercice précédent, on lève cette indétermination en factorisant par le terme dominant en $+\infty$ (ou $-\infty$). Ici le terme dominant, en $+\infty$ comme en $-\infty$, est x^3. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la factorisation :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = x^3\left(1 - \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3}\right) = x^3\left(1 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3\right).$$

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a par somme et produit de limites :

$$\lim_{x \to +\infty} x^3\left(1 - 3\left(\frac{1}{x}\right)^2 + \left(\frac{1}{x}\right)^3\right) = +\infty.$$

D'où $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, comme $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ car polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$. L'objectif étant d'étudier le signe de dérivée sur $\mathbb{R}$, on factorise la dérivée : $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $[-1; 1]$.
On en déduit le tableau de variation suivant :

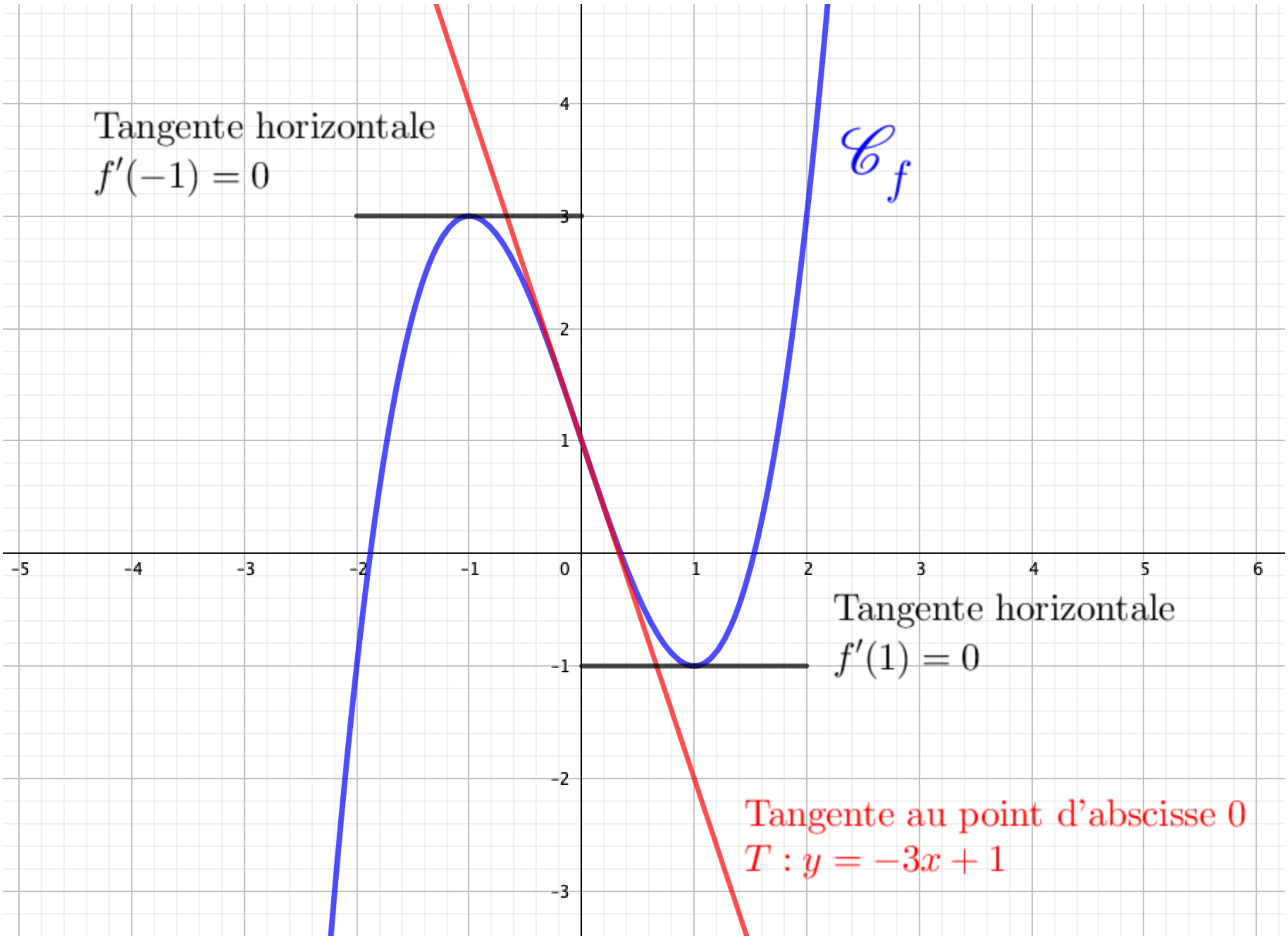
x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	3	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$+\infty$

3. (a) La fonction f' est dérivable car polynomiale. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (f')'(x) = 6x$. La dérivée seconde de f est donc positive sur $[0; +\infty[$ et négative sur $] - \infty; 0]$. Ainsi, f est convexe sur $[0; +\infty[$ et concave sur $] - \infty; 0]$.

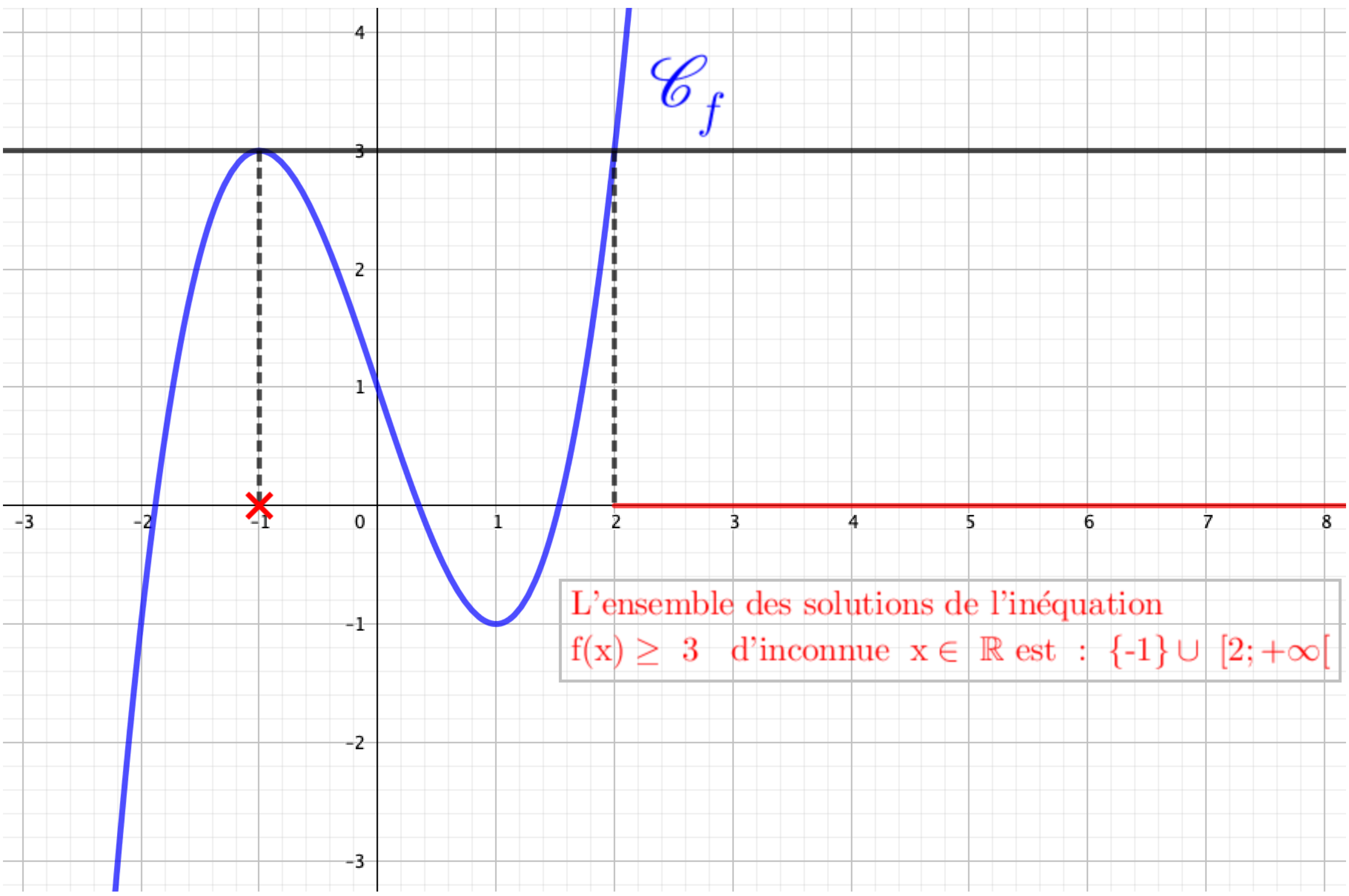
   (b) La dérivée seconde s'annule et change de signe en 0. Donc la point d'abscisse 0 est un point d'inflexion (le graphe de la fonction "passe"de concave à convexe).

4. Rappel : si une fonction f est dérivable en un point a de son ensemble de définition, sa courbe représentative admet une tangente T_a, au point d'abscisse a, qui a pour équation : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par : $T : y = f'(0)x + f(0)$
i.e. $T : y = -3x + 1$.

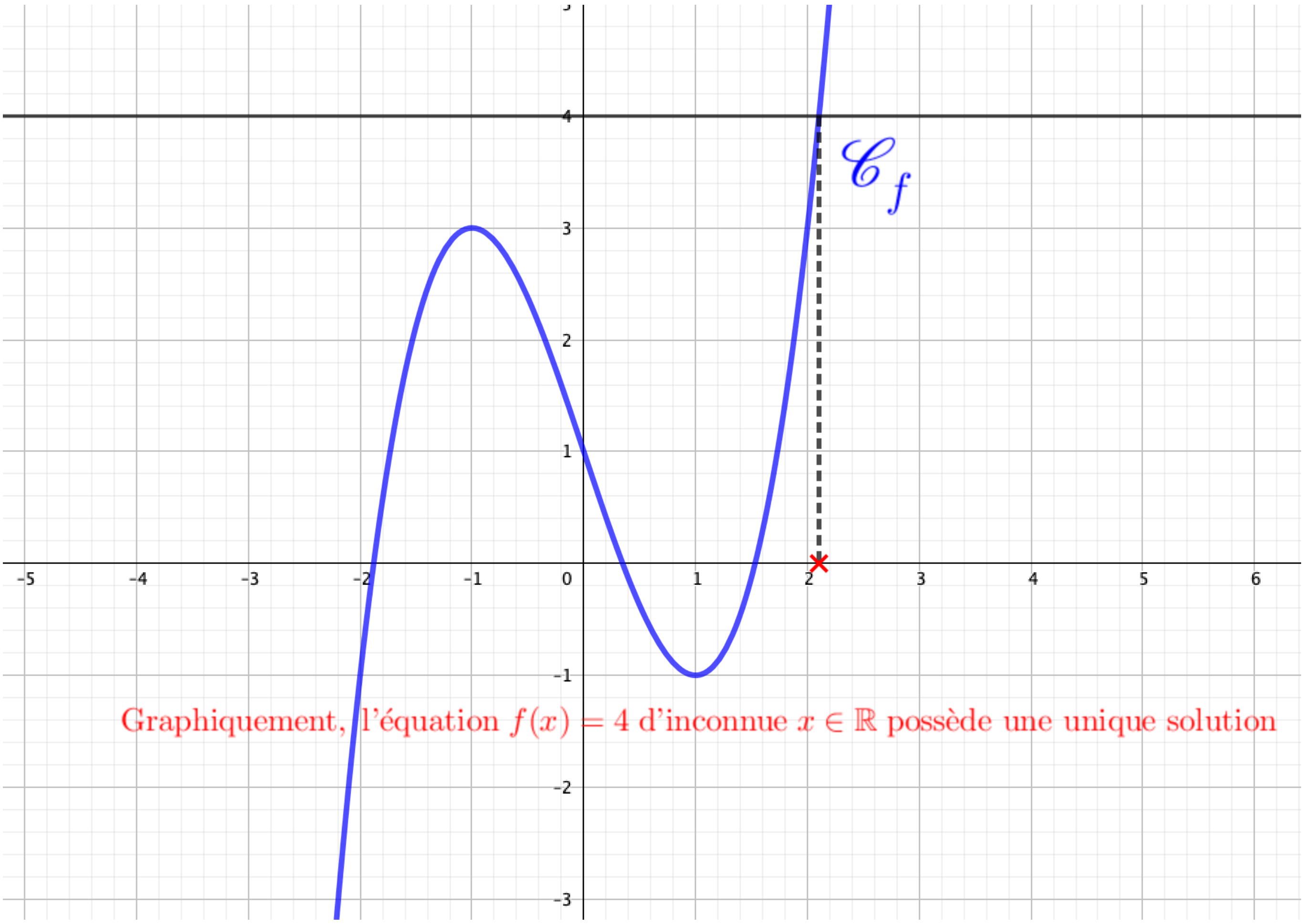
5.


Tangente horizontale
$f'(-1) = 0$
$\mathscr{C}_f$
Tangente horizontale
$f'(1) = 0$
Tangente au point d'abscisse 0
$T : y = -3x + 1$

6.


$\mathscr{C}_f$
L'ensemble des solutions de l'inéquation
f(x) $\geq$ 3 d'inconnue x $\in$ $\mathbb{R}$ est : {-1} $\cup$ [2; +∞[

7.



Grâce au tableau de variation obtenu à la question 2., on sait que sur l'intervalle $]-\infty; 1]$ a pour maximum 3, ainsi l'équation $f(x) = 4$ ne possède aucune solution sur cet intervalle.
Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. **Le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone)** nous assure que tout élément de l'intervalle image $f([1; +\infty[) = [-1; +\infty[$ possède un unique antécédente par f. En particulier, comme $4 \in [-1; +\infty[$, 4 possède un unique antécédent par f appartenant à $[1; +\infty[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une unique solution x_0 qui est dans $[1; +\infty[$. On peut obtenir une valeur approchée de cette solution à l'aide d'un tableur par exemple, on trouve $2.1 \leq x_0 \leq 2.2$.

(a) Les suites numériques

Exercice n°12 Somme des termes d'une suite géométrique

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. On a : $a_{n+1} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{4}a_n$.

   Donc la suite (a_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$. Son premier terme est $a_0 = 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 = 2 \times 1 = 2$.

   On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x^0 = 1$.

2. La suite (a_n) étant géométrique de raison $\frac{3}{4}$ avec $-1 < \frac{3}{4} < 1$, sa limite est nulle.
   Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{R}$. On rappelle la formule donnant la somme $1 + q + \ldots + q^n$:

$$1 + q + \ldots + q^n = \sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si} \quad q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \end{cases}$$

   Soit $n \in \mathbb{N}$. On a donc, grâce à la formule précédente dans le cas où $q = \frac{3}{4}$:

$$\begin{aligned}
S_n &= a_0 + a_1 + \ldots + a_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \\
&= 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^0 + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} 2 \times \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= 2 \times \left(\left(\frac{3}{4}\right)^0 + \left(\frac{3}{4}\right)^1 + \ldots + \left(\frac{3}{4}\right)^n\right) = 2 \times \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3}{4}\right)^k \\
&= 2 \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \\
&= 2 \times \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{\frac{1}{4}} \\
&= 2 \times 4 \times \left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right) \\
&= 8 - 8 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1} \\
&= 8 - 8 \times \frac{3}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \\
&= 8 - 6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^{n}
\end{aligned}$$

4. On sait déjà que $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^n = 0$, ainsi par opérations sur les limites, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} 8 - 6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^n = 8 - 6 \times 0 = 8$. Donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 8$.

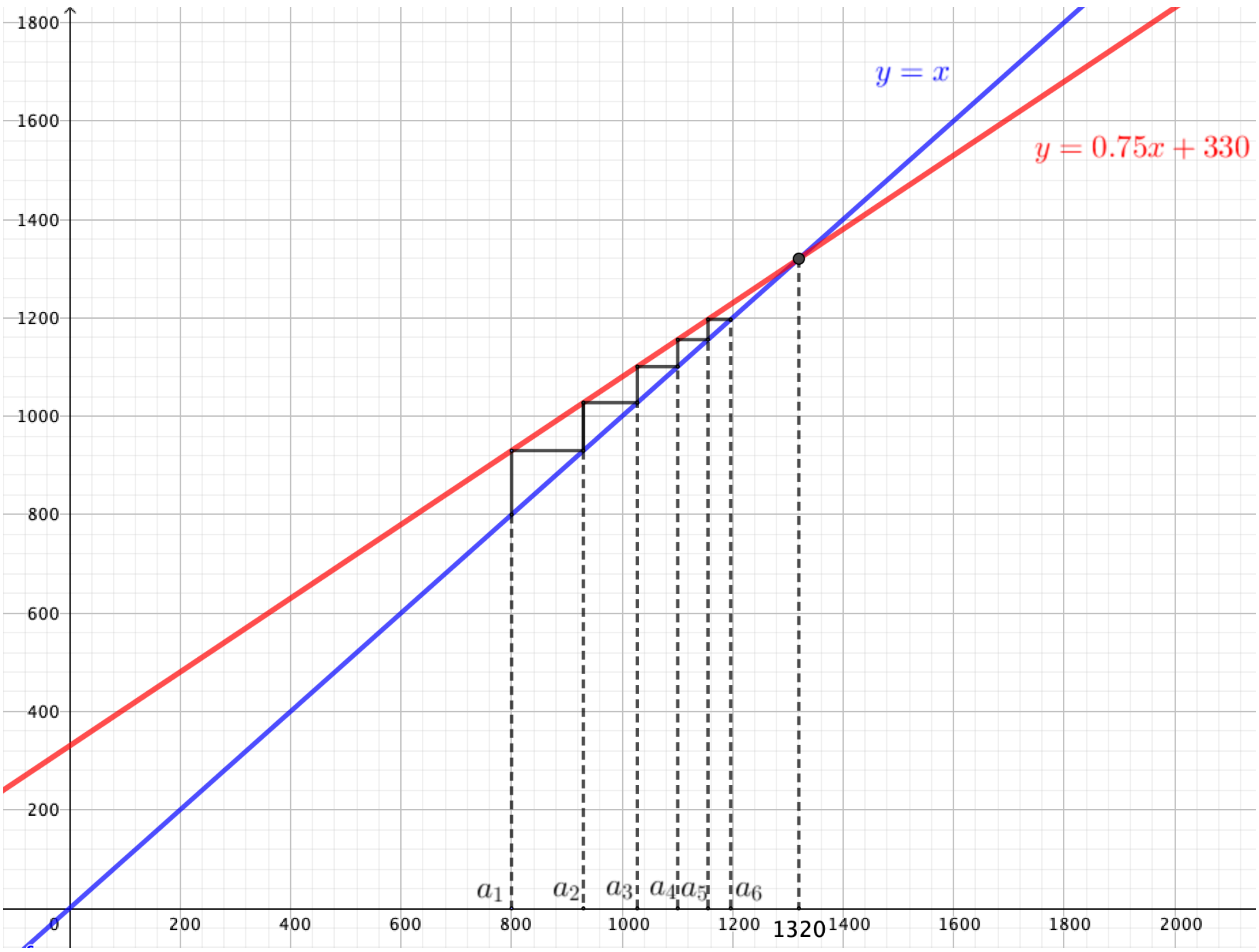
Exercice n°13 Modèle discret et suite arithmético-géométrique

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Le volume d'eau réparti entre les deux bassins est constant au cours du temps. On a donc l'équation, dite "de conservation"(du volume d'eau au cours du temps) :
   Volume bassin A au jour n + Volume bassin B au jour n = 2200 m^3,
   cela s'écrit également : $a_n + b_n = 2200$.

   (b) D'après les données de l'énoncé, le volume d'eau du bassin A au jour $n+1$ est composé de 15% du volume d'eau du bassin B au jour n et de 90% du volume d'eau du bassin A au jour n (étant donné de 10% du volume du bassin A est transféré dans le bassin B). Avec les notations de l'énoncé, on réécrit cela sous la forme : $a_{n+1} = 0,15b_n + 0,9a_n$. Enfin, grâce à la question précédente, on peut écrire :

$$a_{n+1} = 0,15b_n + 0,9a_n = 0,15(2200 - a_n) + 0,9a_n = 330 - 0,15a_n + 0,9a_n = 0,75a_n + 330.$$

(a)



L'abscisse $x_0 \in \mathbb{R}$ du point d'intersection des droites $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ vérifie : $x_0 = 0,75x_0 + 330$, ainsi $x_0 = \dfrac{330}{0,25} = 1320$. On conjecture alors que la suite (a_n) est strictement monotone (strictement croissante) et converge vers 1320.

(b) (i) On sait que $1320 = 0.75 \times 1320 + 330$ $(\star)$ (question précédente) et que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_{n+1} = 0.75a_n + 330$ $(\star\star)$.
Soit $n \in \mathbb{N}$, en faisant la différence de $(\star\star)$ et $(\star)$ membre à membre, on trouve :

$$a_{n+1} - 1320 = (0.75a_n + 330) - (0.75 \times 1320 + 330) = 0,75(a_n - 1320).$$

C'est-à-dire, $u_{n+1} = 0,75u_n = \dfrac{3}{4}u_n$.

Donc (u_n) est géométrique de raison $\dfrac{3}{4}$ et de premier terme $u_1 = a_1 - 1320 = 800 - 1320 = -520$.

(ii) On déduit directement de la question précédente que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = -520\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1} = -520\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$ et $a_n = 1320 + u_n = 1320 - 520\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n-1}$.

Enfin comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} a_n = 1320$.

(c) Le bassin A ayant une capacité de 1200 m^3, il conviendra de stopper le processus le jour $n_0 - 1$ où n_0 est le plus petit entier tel que $a_{n_0} > 1200$. Déterminons n_0.

$$\begin{aligned}
a_{n_0} > 1200 &\iff 1320 - 520\left(\frac{3}{4}\right)^{n_0-1} > 1200 \\
&\iff -520\left(\frac{3}{4}\right)^{n_0-1} > -120 \\
&\iff \left(\frac{3}{4}\right)^{n_0-1} < \frac{3}{13} \\
&\iff \ln\left(\frac{3}{4}\right)^{n_0-1} < \ln\left(\frac{3}{13}\right) \quad \text{[par stricte croissance de ln sur } \mathbb{R}_+^\star\text{]} \\
&\iff (n_0-1)\ln\left(\frac{3}{4}\right) < \ln\left(\frac{3}{13}\right) \\
&\iff n_0 - 1 > \frac{\ln\left(\frac{3}{13}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} \quad \left[\text{car } \ln\left(\frac{3}{4}\right) < 0\ !\right] \\
&\iff n_0 > \frac{\ln\left(\frac{3}{13}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + 1
\end{aligned}$$

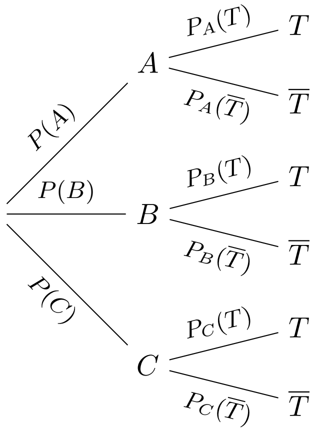
Comme $\dfrac{\ln\left(\frac{3}{13}\right)}{\ln\left(\frac{3}{4}\right)} + 1 \approx 6.1$, on a $n_0 = 7$ et donc il conviendra de stopper le processus au bout de 6 jours ($a_6 \approx 1196.6$ et $a_7 \approx 1227.5$).

(b) Probabilités

Les points du programme à retravailler :

- Contenus et capacités p.21 (Lois discrètes)
- Programme de première : Probabilités conditionnelles et indépendance, variables aléatoires réelles

Exercice n°14 Arbre de probabilité, probabilités conditionnelles, variable aléatoire

1. (a) 

Les informations de l'énoncé nous assurent que :
$P(A) = 0,6,\ P(B) = 0,25,\ P(C) = 0,15,\ P_A(T) = 0,4,\ P_A(\overline{T}) = 0,6,\ P_B(T) = 0,95,$
$P_B(\overline{T}) = 0,05,\ P_C(T) = 0,5,\ P_C(\overline{T}) = 0,5.$

(b) On a par la règle du produit $P(B \cap \overline{T}) = P(B)P_B(\overline{T}) = 0,25 \times 0,05 = 0,0125$.

(c) L'ensemble $\{A, B, C\}$ formant une partition de l'univers, la formule des probabilités totales nous assure que :

$$\begin{aligned} P(T) &= P(T \cap A) + P(T \cap B) + P(T \cap C) \\ &= P(A)P_A(T) + P(B)P_B(T) + P(C)P_C(T) \\ &= 0,6 \times 0,4 + 0,25 \times 0,95 + 0,15 \times 0,5 \\ &= 0,5525 \end{aligned}$$

(d) On utilise la formule de Bayes pour déterminer la probabilité $P_T(B)$, on obtient :

$$P_T(B) = \frac{P(T \cap B)}{P(T)} = \frac{P(B)P_B(T)}{P(T)} = \frac{0,25 \times 0,95}{0,5525} \approx 0,43.$$

2. (a) La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition (6 fois) de l'épreuve de Bernoulli consistant à vérifier si une pièce choisie au hasard est commercialisable ou pas. Ces épreuves étant identiques et réalisées de façon indépendantes, X suit une loi binomiale de paramètres $(6, P(T))$. En notant $p = P(T)$, on a $X \rightsquigarrow \mathscr{B}(6, p)$ et, pour tout $k \in [\![0, 6]\!]$, $P(X = k) = \binom{6}{k} p^k (1-p)^{6-k}$.

(b) L'espérance de cette variable aléatoire est donnée par $E(X) = 6p \approx 3,32$.
La variance de cette variable aléatoire est donnée par $V(X) = 6p(1-p) \approx 1,48$.
L'écart-type de cette variable aléatoire est donnée par $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{6p(1-p)} \approx 1,22$.

(c) La probabilité qu'au moins une pièce du lot ne soit pas commercialisable est donnée par :
$P(X \leq 5) = 1 - P(X = 6) = 1 - \binom{6}{6} p^6 (1-p)^0 = 1 - p^6 \approx 0,97$.

(d) Soit $n \in \mathbb{N}^\star$ le nombre de pièce d'un lot. La probabilité qu'un lot pris au hasard contienne au moins une puce non commercialisable est égale à $1 - p^n$. Ainsi, on cherche le plus petit entier n tel que $1 - p^n \geq 0,99$. On trouve :

$$\begin{aligned} 1 - p^n \geq 0,99 &\iff p^n \leq 0,01 \\ &\iff n\ln(p) \leq \ln(0,01) \\ &\iff n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(p)} \end{aligned}$$

Or $\dfrac{\ln(0,01)}{\ln(p)} \approx 7,76$, donc l'entier recherché est $n = 8$.