

Éléments de correction

1. Première partie du travail : le calcul algébrique

(a) Manipulation des fractions

Exercice n°1 Simplifications de fractions

$$A = \frac{5}{7} \times \frac{21}{25} = \frac{5 \times 21}{7 \times 25} = \frac{5 \times 7 \times 3}{7 \times 5 \times 5} = \frac{3}{5};$$

$$B = \frac{3}{\frac{2}{3}} = 3 \times \frac{3}{2} = \frac{3 \times 3}{2} = \frac{9}{2};$$

$$C = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{3}} = \frac{3}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{2 \times 3} = \frac{1}{2};$$

$$D = \frac{1}{2} + \frac{3}{7} = \frac{1 \times 7}{2 \times 7} + \frac{3 \times 2}{7 \times 2} = \frac{7+6}{14} = \frac{13}{14};$$

$$E = \frac{1}{12} - \frac{1}{8} = \frac{1 \times 2}{12 \times 2} - \frac{1 \times 3}{8 \times 3} = \frac{2-3}{24} = \frac{-1}{24} = -\frac{1}{24};$$

$$F = \frac{1 + \frac{3}{4}}{1 - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4}{4} + \frac{3}{4}}{\frac{5}{5} - \frac{3}{5}} = \frac{\frac{4+3}{4}}{\frac{5-3}{5}} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{2}{5}} = \frac{7}{4} \times \frac{5}{2} = \frac{7 \times 5}{4 \times 2} = \frac{35}{8};$$

$$G = -\frac{1}{5} \left(\frac{9}{7} - \frac{1}{8} \right) = -\frac{1}{5} \left(\frac{9 \times 8}{7 \times 8} - \frac{1 \times 7}{8 \times 7} \right) = -\frac{1}{5} \times \frac{72-7}{56} = -\frac{1}{5} \times \frac{65}{56} = -\frac{1 \times 65}{5 \times 56} = -\frac{5 \times 13}{5 \times 56} = -\frac{13}{56};$$

$$H = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+1}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{1+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{2+1}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{3}{3} + \frac{2}{3}} = \frac{1}{\frac{5}{3}} = \frac{3}{5}.$$

Exercice n°2 Simplifications de fractions faisant intervenir une variable

Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$A = \frac{n+2}{5n+10} = \frac{n+2}{5 \times (n+2)} = \frac{1}{5};$$

$B = \frac{n+2}{n+4}$. Pas de simplification immédiate, mais peut se réécrire de nombreuses façons intéressantes, méditer les égalités suivantes :

$$B = \frac{n+2}{n+4} = \frac{n \times \left(1 + \frac{2}{n}\right)}{n \times \left(1 + \frac{4}{n}\right)} = \frac{1 + \frac{2}{n}}{1 + \frac{4}{n}} \text{ ou encore } B = \frac{n+2}{n+4} = \frac{n+4-2}{n+4} = \frac{n+4}{n+4} - \frac{2}{n+4} = 1 - \frac{2}{n+4}.$$

$$C = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} \times \dots \times \frac{n-1}{n} = \frac{1 \times 2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1)}{2 \times 3 \times \dots \times (n-2) \times (n-1) \times n} = \frac{2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times 1}{2 \times 3 \times \dots \times (n-1) \times n} = \frac{1}{n}.$$

$$D = \frac{n-1}{n^2-1} = \frac{n-1}{n^2-1^2} = \frac{n-1}{(n-1)(n+1)} = \frac{1}{n+1}.$$

(b) Manipulation des puissances

Exercice n°3 Réécriture d'expressions avec des puissances

$$A = \frac{5^3}{25} = \frac{5^3}{5^2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5;$$

$$B = 2^3 \times 4^5 \times 8^{-1} = 2^3 \times (2^2)^5 \times (2^3)^{-1} = 2^3 \times 2^{2 \times 5} \times 2^{3 \times (-1)} = 2^3 \times 2^{10} \times 2^{-3} = 2^{3+10-3} = 2^{10};$$

On a la décomposition $1000 = 2 \times 500 = 2 \times 2 \times 250 = 2 \times 2 \times 2 \times 125 = 2 \times 2 \times 2 \times 5 \times 25 = 2^3 \times 5^3$.

$$C = \frac{1000}{5^4 \times 2^6} = \frac{2^3 \times 5^3}{2^6 \times 5^4} = \frac{2^3}{2^6} \times \frac{5^3}{5^4} = 2^{3-6} \times 5^{3-4} = 2^{-3} \times 5^{-1};$$

$$D = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(9^{-1} \times 2^3)^3} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(9^{-1})^3 \times (2^3)^3} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{9^{-1 \times 3} \times 2^{3 \times 3}} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{9^{-3} \times 2^9} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{(3^2)^{-3} \times 2^9} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{3^{2 \times (-3)} \times 2^9} = \frac{3^5 \times 2^{-3}}{3^{-6} \times 2^9} =$$

$$\frac{3^5}{3^{-6}} \times \frac{2^{-3}}{2^9} = 3^{5-(-6)} \times 2^{-3-9} = 2^{-12} \times 3^{11};$$

$$E = \frac{\frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25}}{10^2 \times 2} = \frac{2^3 \times 5^{-3}}{4 \times 25} \times \frac{5^8}{10^2 \times 2} = \frac{2^3 \times 5^{-3} \times 5^8}{2^2 \times 5^2 \times (2 \times 5)^2 \times 2^1} = \frac{2^3 \times 5^{-3+8}}{2^2 \times 5^2 \times 2^2 \times 5^2 \times 2^1} = \frac{2^3 \times 5^5}{2^{2+2+1} \times 5^{2+2}} =$$

$$\frac{2^3 \times 5^5}{2^5 \times 5^4} = \frac{2^3}{2^5} \times \frac{5^5}{5^4} = 2^{3-5} \times 5^{5-4} = 2^{-2} \times 5^1.$$

Exercice n°4 Réécriture d'expressions avec des puissances

$$1. 3^n - 6^n = 6^n \left(\frac{3^n}{6^n} - 1 \right) = 6^n \left(\left(\frac{3}{6} \right)^n - 1 \right) = 6^n \left(\left(\frac{1}{2} \right)^n - 1 \right).$$

$$2. \frac{1}{9} \left(\frac{3}{4} \right)^n = \frac{1}{9} \left(\frac{3}{4} \right)^2 \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = \frac{1 \cdot 3^2}{9 \cdot 4^2} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = \frac{1 \cdot 9}{9 \cdot 16} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2} = \frac{1}{16} \left(\frac{3}{4} \right)^{n-2}.$$

$$3. \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - \frac{1^n}{2^n}}{\frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \frac{1}{2^n} \right) = 2 - \frac{2}{2^n} = 2 - \frac{1}{2^{n-1}}.$$

$$4. \frac{2 \times 4^n + (-2)^n}{2 \times 4^n - (-2)^n} = \frac{4^n \left(2 + \frac{(-2)^n}{4^n} \right)}{4^n \left(2 - \frac{(-2)^n}{4^n} \right)} = \frac{2 + \left(\frac{-2}{4}\right)^n}{2 - \left(\frac{-2}{4}\right)^n} = \frac{2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n}{2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n} = \frac{\left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right)}{\left(\frac{-1}{2}\right) \times \left(2 - \left(\frac{-1}{2}\right)^n \right)} = \frac{-1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{-1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}$$

$$= \frac{1 - \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}{1 + \left(\frac{-1}{2}\right)^{n+1}}$$

(c) Manipulation de racines carrées

Exercice n°5 Simplifications de racines carrées

$$A = \sqrt{20} = \sqrt{2^2 \times 5} = \sqrt{2^2} \times \sqrt{5} = 2\sqrt{5};$$

$$B = \sqrt{75} + \sqrt{45} = \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{9 \times 5} = \sqrt{25} \times \sqrt{3} + \sqrt{9} \times \sqrt{5} = \sqrt{5^2} \times \sqrt{3} + \sqrt{3^2} \times \sqrt{5} = 5\sqrt{3} + 3\sqrt{5};$$

$$C = \frac{4}{\sqrt{8}} = \frac{4}{\sqrt{4 \times 2}} = \frac{2 \times 2}{2\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2};$$

$$D = \frac{\sqrt{8} \times \sqrt{42}}{\sqrt{3} \times \sqrt{56}} = \frac{\sqrt{4 \times 2} \times \sqrt{2 \times 3 \times 7}}{\sqrt{3} \times \sqrt{4 \times 2 \times 7}} = \frac{\sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \sqrt{3} \times \sqrt{7}}{\sqrt{3} \times \sqrt{4} \times \sqrt{2} \times \sqrt{7}} = \sqrt{2};$$

$$\text{Pour } x \in \mathbb{R}, E = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x \leq 0 \end{cases} = |x|.$$

Exemple : pour $x = 5 \geq 0$, on a $\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5$; mais pour $x = -5 \leq 0$, on a $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = -(-5)$.

(d) Les identités remarquables

Exercice n°6 Développement et factorisation avec les identités remarquables

$$A = (x - y)^2 + (x + y)^2 = x^2 - 2xy + y^2 + x^2 + 2xy + y^2 = 2x^2 + 2y^2 = 2(x^2 + y^2);$$

• Méthode 1, on développe :

$$B = (x + y)^2 - (x - y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 - (x^2 - 2xy + y^2) = x^2 + 2xy + y^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4xy,$$

• Méthode 2, on factorise :

$$B = (x + y)^2 - (x - y)^2 = ((x + y) - (x - y)) \times ((x + y) + (x - y)) = (x + y - x + y) \times (x + y + x - y) = 2y \times 2x = 4xy$$

$$C = (2 + \sqrt{5}) \times (2 - \sqrt{5}) = 2^2 - (\sqrt{5})^2 = 4 - 5 = -1;$$

$$D = \frac{(\sqrt{2} + 2)^2}{3} = \frac{(\sqrt{2})^2 + 2 \cdot \sqrt{2} \cdot 2 + 2^2}{3} = \frac{2 + 4\sqrt{2} + 4}{3} = \frac{6}{3} + \frac{4}{3}\sqrt{2} = 2 + \frac{4}{3}\sqrt{2};$$

$$E = \sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = \sqrt{1 + 2\sqrt{2} + 2} = \sqrt{1^2 + 2\sqrt{2} + (\sqrt{2})^2} = \sqrt{(1 + \sqrt{2})^2} = 1 + \sqrt{2}.$$

$$5. A = x^2 + 5x = x.x + x.5 = x.(x + 5) = x(x + 5) ;$$

$$B = (3x - 2)(x + 2) - (x + 2)^2 = (3x - 2)(x + 2) - (x + 2)(x + 2) = ((3x - 2) - (x + 2))(x + 2) = (3x - 2 - x - 2)(x + 2) = (2x - 4)(x + 2) = 2(x - 2)(x + 2) ;$$

$$C = 4 + 4x + x^2 = 2^2 + 2.2.x + x^2 = (2 + x)^2 ;$$

$$D = 1 - x^2 = 1^2 - x^2 = (1 - x)(1 + x) ;$$

$$E = 3x - 2x^3 = 3.x - 2x^2.x = (3 - 2x^2).x = 2 \left(\frac{3}{2} - x^2 \right) x = 2x \left(\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \right)^2 - x^2 \right) = 2x \left(\sqrt{\frac{3}{2}} - x \right) \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + x \right).$$

Exercice n°7 Utiliser la quantité conjuguée

$$A = \frac{2}{\sqrt{5} - 1} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5} - 1)(\sqrt{5} + 1)} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{(\sqrt{5})^2 - 1^2} = \frac{2(\sqrt{5} + 1)}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} ;$$

$$B = \frac{2 + \sqrt{5}}{1 + \sqrt{3}} = \frac{(2 + \sqrt{5})(1 - \sqrt{3})}{(1 + \sqrt{3})(1 - \sqrt{3})} = \frac{2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{15}}{1^2 - (\sqrt{3})^2} = \frac{2 - 2\sqrt{3} + \sqrt{5} - \sqrt{15}}{-2}$$

$$= \frac{2}{-2} + \frac{-2\sqrt{3}}{-2} + \frac{\sqrt{5}}{-2} + \frac{-\sqrt{15}}{-2} = -1 + \sqrt{3} - \frac{1}{2}\sqrt{5} + \frac{1}{2}\sqrt{15}.$$

(e) Mises au point sur les équations et les inéquations

Exercice n°8 Résolutions d'équations et d'inéquations

1.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} 3x + 5 = -2x + 1 &\iff 3x + 5 + 2x = -2x + 1 + 2x \\ &\iff 5x + 5 = 1 \\ &\iff 5x + 5 - 5 = 1 - 5 \\ &\iff 5x = -4 \\ &\iff \frac{5x}{5} = \frac{-4}{5} \\ &\iff x = \frac{-4}{5} \end{aligned}$$

L'équation (A) possède pour unique solution $-\frac{4}{5}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} x + 2 - (2x + 1) = -x + 7 &\iff x + 2 - 2x - 1 = -x + 7 \\ &\iff -x + 1 = -x + 7 \\ &\iff 1 = 7 \end{aligned}$$

Cette dernière égalité étant fausse, l'équation (B) ne possède aucune solution.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} (3x + 5)(6x - 4) = 0 &\iff 3x + 5 = 0 \quad \text{OU} \quad 6x - 4 = 0 \quad [\text{r\`egle du produit nul}] \\ &\iff 3x = -5 \quad \text{OU} \quad 6x = 4 \\ &\iff x = \frac{-5}{3} \quad \text{OU} \quad x = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \end{aligned}$$

Les solutions de l'équation (C) sont $-\frac{5}{3}$ et $\frac{2}{3}$.

- Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 x^2 - 4 = 0 &\iff x^2 - 2^2 = 0 \\
 &\iff (x - 2)(x + 2) = 0 \quad [\text{On factorise l'expression gr\u00e2ce \u00e0 une identit\u00e9 remarquable}] \\
 &\iff x - 2 = 0 \quad \text{OU} \quad x + 2 = 0 \quad [\text{r\u00e8gle du produit nul}] \\
 &\iff x = 2 \quad \text{OU} \quad x = -2
 \end{aligned}$$

Les solutions de l'\u00e9quation (D) sont 2 et -2.

- Contrairement aux \u00e9quations pr\u00e9c\u00e9dentes, l'expression pr\u00e9sente dans l'\u00e9quation (E) n'est pas d\u00e9finie pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, cette expression est bien d\u00e9finie \u00e0 condition que le d\u00e9nominateur ne s'annule pas, ce qui arrive si et seulement si $x \neq -\frac{1}{2}$.

On dit alors que l'ensemble de d\u00e9finition de l'\u00e9quation est $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Dans les \u00e9quations pr\u00e9c\u00e9dentes, cet ensemble \u00e9tait \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{x - 1}{2x + 1} = 1 &\iff x - 1 = 2x + 1 \quad [2x + 1 \neq 0] \\
 &\iff x = -2
 \end{aligned}$$

L'\u00e9quation (E) poss\u00e8de une unique solution qui est -2.

2.

- L'ensemble de d\u00e9finition est \mathbb{R} .

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}
 2x - 5 \leq x - 9 &\iff 2x - 5 - x \leq x - 9 - x \\
 &\iff x - 5 \leq -9 \\
 &\iff x - 5 + 5 \leq -9 + 5 \\
 &\iff x \leq -4
 \end{aligned}$$

L'ensemble des solutions de l'in\u00e9quation (A) est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -4\} =]-\infty; -4]$.

- L'ensemble de d\u00e9finition est \mathbb{R} .

Pour r\u00e9soudre l'in\u00e9quation (B), on cherche \u00e0 d\u00e9terminer quand l'expression factoris\u00e9e du membre de gauche est positive. On peut alors faire appel \u00e0 la r\u00e8gle des signes apr\u00e8s avoir d\u00e9terminer le signe de chacun des facteurs.

On r\u00e9sume cela dans un *tableau de signes* :

x	$-\infty$	-1	5	$+\infty$	
$x + 1$	-	0	+	+	
$x - 5$	-	-	0	+	
$(x + 1)(x - 5)$	+	0	-	0	+

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'in\u00e9quation (B) est $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1 \text{ OU } 5 \leq x\} =]-\infty - 1] \cup [5; +\infty[$.

- L'ensemble de d\u00e9finition est \mathbb{R} .

Pour r\u00e9soudre l'in\u00e9quation (B), on tente une approche similaire \u00e0 l'in\u00e9quation pr\u00e9c\u00e9dente. Il faut donc factoriser le membre de gauche.

Soit $x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 + 3x \leq 0 \iff x(x + 3) \leq 0$.

Le tableau suivant donne le signe de $x(x + 3)$ pour $x \in \mathbb{R}$:

x	$-\infty$	-3	0	$+\infty$
$x + 3$	$-$	0	$+$	$+$
x	$-$	$-$	0	$+$
$x(x + 3)$	$+$	0	$-$	$+$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (C) est $\{x \in \mathbb{R} \mid -3 \leq x \leq 0\} = [-3; 0]$.

- L'ensemble de définition est $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$.

Soit $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{1}{2} \right\}$. On a :

$$\begin{aligned}
 \frac{x-1}{2x+1} \leq 1 &\iff \frac{x-1}{2x+1} - 1 \leq 0 \\
 &\iff \frac{x-1}{2x+1} - \frac{2x+1}{2x+1} \leq 0 \\
 &\iff \frac{x-1-(2x+1)}{2x+1} \leq 0 \\
 &\iff \frac{-x-2}{2x+1} \leq 0
 \end{aligned}$$

On conclut encore avec un tableau de signes :

x	$-\infty$	-2	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-x - 2$	$+$	0	$-$	$-$
$2x + 1$	$-$	$-$	0	$+$
$\frac{-x-2}{2x+1}$	$-$	0	0	$-$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (D) est

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -2 \text{ OU } -\frac{1}{2} \leq x\} =]-\infty - 2] \cup \left[-\frac{1}{2}; +\infty \right[.$$

- L'ensemble de définition est \mathbb{R} .

On commence par factoriser l'expression $4x^2 - 1$ pour $x \in \mathbb{R}$ afin de pouvoir utiliser la règle des signes.

On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $4x^2 - 1 = 4 \left(x^2 - \frac{1}{2^2} \right) = 4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$ (identité remarquable).

Le nombre 4 étant positif, le signe de $4 \left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$ est le signe de $\left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$.

Tableau de signes associé :

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$x + \frac{1}{2}$	$-$	0	$+$	$+$
$x - \frac{1}{2}$	$-$	$-$	0	$+$
$\left(x - \frac{1}{2} \right) \left(x + \frac{1}{2} \right)$	$+$	0	0	$+$

Ainsi, l'ensemble des solutions de l'inéquation (E) est $] -\infty - \frac{1}{2}] \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty \right[.$

(f) Racines et factorisation d'un trinôme du second degré

Exercice n°9 Factorisation et signe d'un trinôme de degré deux

Soit $x \in \mathbb{R}$.

1. (a) Le discriminant de P est $12^2 - 4 \times (-2) \times (-18) = 0$. Le trinôme P possède donc une unique racine qui est $\frac{-12}{2 \times (-2)} = 3$. La forme factorisée de P est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = -2(x - 3)^2$.

(b) On en déduit directement que l'expression $P(x)$ est négative pour tout $x \in \mathbb{R}$.

2. (a) Le discriminant de Q est $2^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 12$ est strictement positif. Le trinôme Q possède donc deux racines réelles distinctes qui sont $\frac{-2 - \sqrt{12}}{2 \times 1} = -1 - \sqrt{3}$ et $-1 + \sqrt{3}$. La forme factorisée de Q est donnée, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$Q(x) = \left(x - (-1 - \sqrt{3})\right) \left(x - (-1 + \sqrt{3})\right).$$

- (b) L'expression factorisée obtenue permet de déterminer le signe de $Q(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$ par un tableau de signe.

x	$-\infty$	$-1 - \sqrt{3}$	$-1 + \sqrt{3}$	$+\infty$
$x + 1 + \sqrt{3}$	-	0	+	+
$x + 1 - \sqrt{3}$	-	-	0	+
$(x + 1 + \sqrt{3})(x + 1 - \sqrt{3})$	+	0	-	+

Ainsi, $Q(x)$ est positif pour $x \in]-\infty; -1 - \sqrt{3}] \cup [-1 + \sqrt{3}; +\infty[$ et négatif pour $x \in [-1 - \sqrt{3}; -1 + \sqrt{3}]$.

3. (a) Le discriminant de R est $1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3$ est strictement négatif. Le trinôme R ne possède aucune racine réelle et ne peut donc être factorisé comme un produit de deux fonctions polynomiales de degré un.
- (b) L'expression $R(x)$ sera strictement positive pour tout $x \in \mathbb{R}$. En effet, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on peut écrire R sous forme canonique :

$$R(x) = x^2 + x + 1 = \overbrace{\left(x + \frac{1}{2}\right)^2}^{\geq 0} + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4} > 0.$$

On pourra retenir le résultat suivant concernant le signe d'un trinôme de degré deux :

Factorisation d'un trinôme du second degré :

Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. On considère le trinôme de degré deux $P(x) = ax^2 + bx + c$.

On note Δ le réel $b^2 - 4ac$, on l'appelle le *discriminant* de P .

Un réel r est une *racine* de P si et seulement si $P(r) = ar^2 + br + c = 0$.

- Si $\Delta > 0$ alors P possède **deux racines réelles distinctes**

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Factorisation : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$

- Si $\Delta = 0$ alors P possède **une unique racine réelle** appelée "racine double"

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

Factorisation : $P(x) = ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$

- Si $\Delta < 0$ alors P ne possède pas de racines réelles.

Factorisation : P ne peut pas se factoriser comme un produit de deux polynômes de degré un à coefficients réels.

Signe d'un trinôme du second degré :

Les factorisations précédentes nous assurent que :

- Si $\Delta > 0$ le trinôme est du signe de a à l'extérieur de l'intervalle délimité par x_1 et x_2 , et du signe contraire à celui de a entre les racines.
- Si $\Delta = 0$ le trinôme est du signe de a et s'annule en x_1 .
- Si $\Delta < 0$ le trinôme est strictement du signe de a .

(g) Propriétés des fonctions exponentielles et logarithme népérien**Exercice n°10 Simplification d'expressions avec exp et ln**

$$1. A = \frac{\ln(16) + \ln(64)}{10 \ln(2) + \ln(4)} = \frac{\ln(2^4) + \ln(2^6)}{\ln(2^{10}) + \ln(2^2)} = \frac{\ln(2^4 \times 2^6)}{\ln(2^{10} \times 2^2)} = \frac{\ln(2^{10})}{\ln(2^{12})} = \frac{10 \ln(2)}{12 \ln(2)} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$$

$$2. B = \frac{\sqrt{e^{2x}} \times e^{5x+3}}{e^{3x} \times e^{-3x+1}} = \frac{\sqrt{(e^x)^2} \times e^{5x+3}}{e^{3x+(-3x+1)}} = \frac{e^x \times e^{5x+2}}{e^1} = \frac{e^{x+(5x+2)}}{e^1} = e^{6x+3-1} = e^{6x+2}$$

$$3. C = \ln\left(\frac{e^5 \times 12}{e^{-6} \times e^2}\right) = \ln(e^5 \times 12) - \ln(e^{-6} \times e^2) = \ln(e^5) + \ln(12) - (\ln(e^{-6}) + \ln(e^2)) \\ = 5 + \ln(12) - (-6 + 2) = 9 + \ln(12) = 9 + \ln(2^2 \times 3) = 9 + \ln(2^2) + \ln(3) = 9 + 2 \ln(2) + \ln(3)$$

2. Seconde partie du travail : exercices sur des thèmes de lycée

Exercice n°11 Quelques calculs de dérivées

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{1}{x^2} = \frac{x\sqrt{x} - 2}{2x^2}$.

2. Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, $f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$.

Dérivée d'un produit de fonction : $(u \times v)' = u' \times v + u \times v'$.

3. Pour tout $x \in \mathbb{R} / \left\{ \frac{1}{2} \right\}$, $f'(x) = \frac{(-1) \times (1 - 2x) - (-x) \times (-2)}{(1 - 2x)^2} = \frac{-1}{(1 - 2x)^2}$.

Dérivée d'un quotient : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \times v - u \times v'}{v^2}$

4. Pour tout $x \in \left] -\infty; \frac{1}{2} \right[$, $f'(x) = \frac{-2}{1 - 2x} = \frac{2}{2x - 1}$. Dérivée de $\ln(u)$: $(\ln(u))' = \frac{u'}{u}$

5. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (2x - 3)e^{2x-3x+1}$. Dérivée de e^u : $(e^u)' = u' \times e^u$

6. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2 \times (-2e^{-2x} + e^x) \times (e^{-2x} + e^x)$. Dérivée de u^2 : $(u^2)' = 2 \times u' \times u$

Exercice n°12 Fonction exponentielle, calculs de limites et intégration

On considère la fonction f définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) = 2e^x - e^{2x}$. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} . On fixe un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans ce repère.

1. Rappel : Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $e^{x+y} = e^x \times e^y$.

Soit $x \in \mathbb{R}$. On commence par écrire la factorisation : $f(x) = 2e^x - e^{2x} = 2 \times e^x - e^x \times e^x = e^x(2 - e^x)$.

Ainsi :

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff e^x(2 - e^x) = 0 \\ &\iff e^x = 0 \quad \text{OU} \quad e^x = 2 \\ &\iff e^x = 2 \\ &\iff x = \ln(2) \end{aligned}$$

Rappel : On a conclu grâce à la réciprocity des fonctions exponentielle et logarithme népérien : pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, $e^x = y \iff x = \ln(y)$.

L'équation d'inconnue $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 0$ possède pour unique solution $\ln(2)$.

2. (a) Rappel : $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$.

Ainsi, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{2x} = 0$. Par somme on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} 2e^x - e^{2x} = 0$.

Rappel : comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$, la droite d'équation $y = 0$ est asymptote (horizontale) à la courbe représentative de f au voisinage de $-\infty$.

(b) La limite $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x - e^{2x}$, écrit sous cette forme, est indéterminée.

Rappel : $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$.

En effet, $\lim_{x \rightarrow +\infty} 2e^x = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x} = +\infty$, c'est donc une forme indéterminée du type $\infty - \infty$.

Pour lever une forme indéterminée au voisinage de ∞ , on factorise par le terme dominant (qui est ici e^{2x}), ce qui donne :

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2e^x - e^{2x} = e^{2x}(2e^{-x} - 1)$.

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty$, on a $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$ et donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} - 1 = -1$. D'où, par produit,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{2x}(2e^{-x} - 1) = -\infty.$$

3. On rappelle pourquoi la fonction f est dérivable sur \mathbb{R} : La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} .

On calcule la dérivée : De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2e^x - 2e^{2x} = 2e^x(1 - e^x)$.

On étudie le signe de $f'(x)$ sur \mathbb{R} : Comme, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $2e^x > 0$, le signe de $f'(x)$ est le signe de

$1 - e^x$. Il reste donc à étudier le signe de $1 - e^x$ pour $x \in \mathbb{R}$; pour cela on résout une inéquation, par exemple : $1 - e^x \leq 0$.

Soit $x \in \mathbb{R}$.

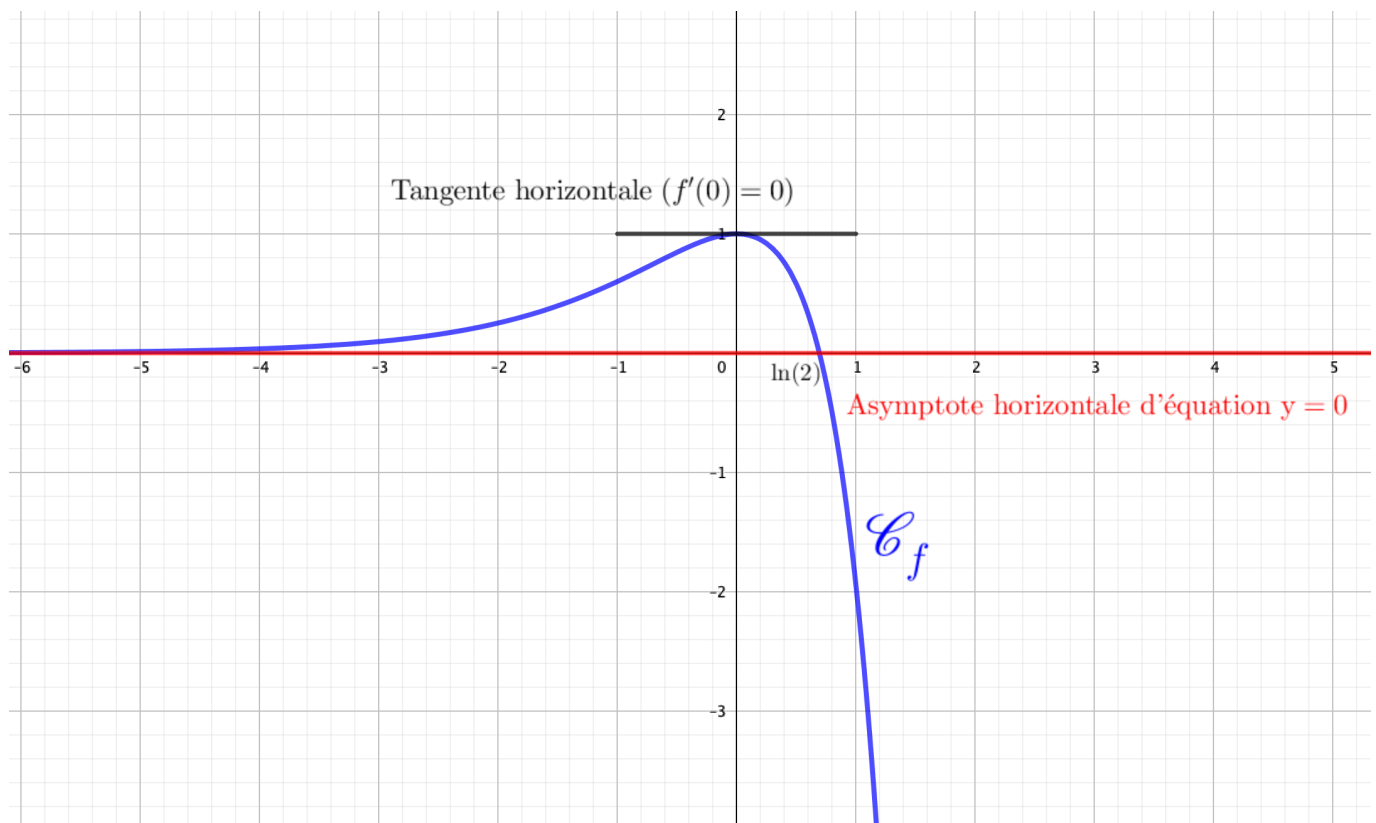
$$\begin{aligned} 1 - e^x \leq 0 &\iff 1 \leq e^x \\ &\iff \ln(1) \leq \ln(e^x) \quad [\text{Par stricte croissance de } \ln \text{ sur } \mathbb{R}_+^*] \\ &\iff 0 \leq x \end{aligned}$$

Donc, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $x \in [0; +\infty[$ et on montrerait de même que $f'(x) \geq 0$ si et seulement si $x \in]-\infty; 0]$.

On établit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
f	0	1	$-\infty$

4.



5. La fonction F est dérivable sur \mathbb{R} comme somme de fonctions dérivables sur \mathbb{R} et, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $F'(x) = 2e^x - \frac{1}{2} \times 2 \times e^{2x} = 2e^x - e^{2x} = f(x)$. Donc F est une primitive de f sur \mathbb{R} .

6. Grâce à la question précédente, on a

$$I = \int_{-1}^0 f(x) dx = [F(x)]_{-1}^0 = F(0) - F(-1) = \left(2e^0 - \frac{1}{2}e^{2 \cdot 0}\right) - \left(2e^{-1} - \frac{1}{2}e^{2 \cdot (-1)}\right) = \frac{3}{2} - \frac{2}{e} + \frac{1}{2e^2}.$$

Exercice n°13 Fonction polynomiale, convexité, équation $f(x) = k$, inéquation $f(x) \leq k$

On considère la fonction f définie par $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
 $x \longmapsto x^3 - 3x + 1$.

La fonction f est deux fois dérivable sur \mathbb{R} car polynomiale.

On fixe un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) et on note \mathcal{C} la courbe représentative de f dans ce repère.

1. La limite en $+\infty$ comme en $-\infty$ sont des formes indéterminées du type $\infty - \infty$. Comme dans l'exercice précédent, on lève cette indétermination en factorisant par le terme dominant en $+\infty$ (ou $-\infty$). Ici le terme dominant, en $+\infty$ comme en $-\infty$, est x^3 . On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la factorisation :

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 = x^3 \left(1 - \frac{3x}{x^3} + \frac{1}{x^3} \right) = x^3 \left(1 - 3 \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} \right)^3 \right).$$

Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a par somme et produit de limites :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - 3 \left(\frac{1}{x} \right)^2 + \left(\frac{1}{x} \right)^3 \right) = +\infty.$$

D'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.

De même, comme $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$.

2. La fonction f est dérivable sur \mathbb{R} car polynomiale. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 3x^2 - 3$. L'objectif étant d'étudier le signe de dérivée sur \mathbb{R} , on factorise la dérivée : $f'(x) = 3(x^2 - 1) = 3(x + 1)(x - 1)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) \leq 0$ si et seulement si $[-1; 1]$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

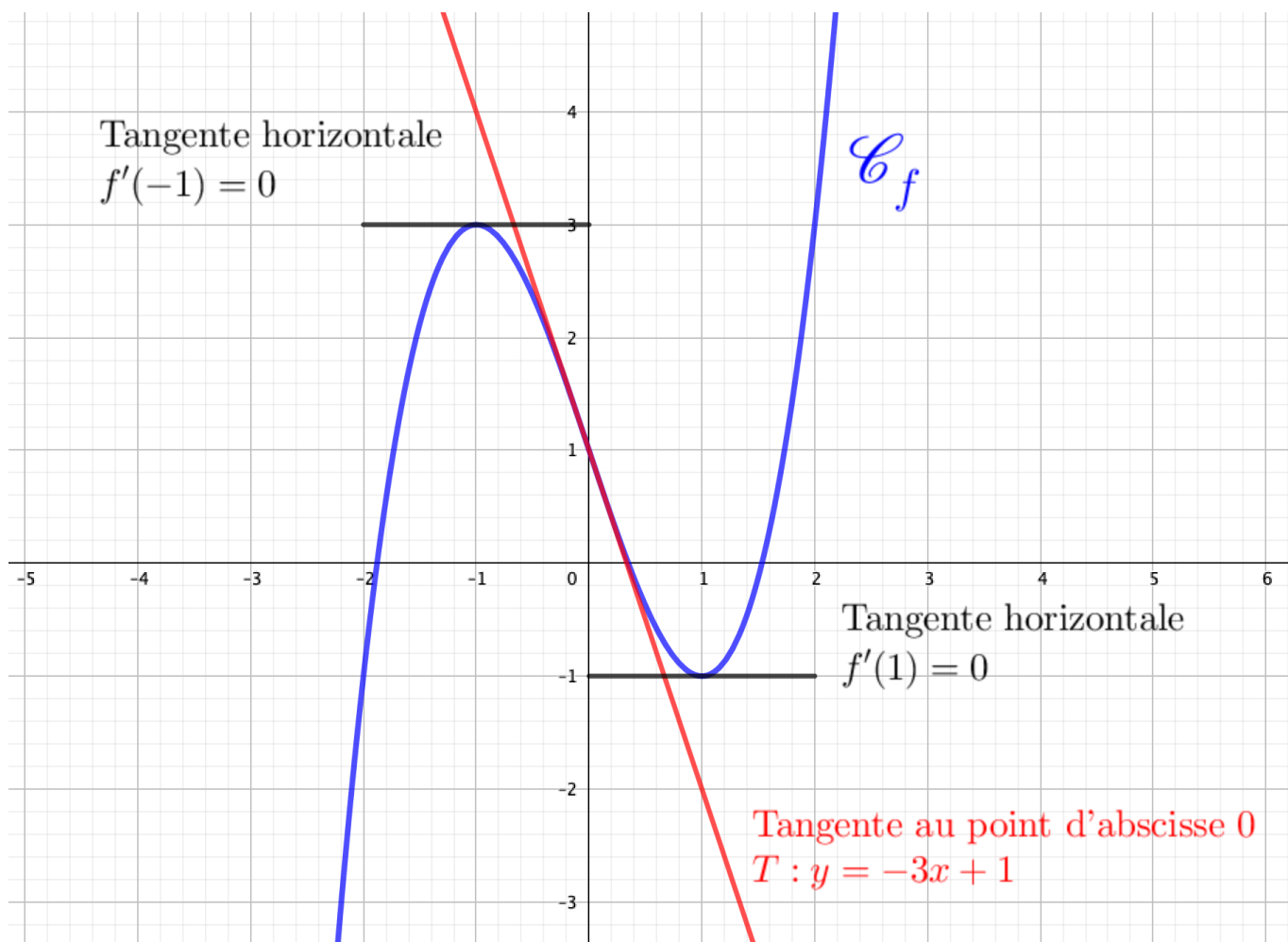
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$-\infty$	3	-1	$+\infty$	

3. (a) La fonction f' est dérivable car polynomiale. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f''(x) = (f')'(x) = 6x$. La dérivée seconde de f est donc positive sur $[0; +\infty[$ et négative sur $] - \infty; 0]$. Ainsi, f est convexe sur $[0; +\infty[$ et concave sur $] - \infty; 0]$.
 (b) La dérivée seconde s'annule et change de signe en 0. Donc la point d'abscisse 0 est un point d'inflexion (le graphe de la fonction "passe" de concave à convexe).
4. Rappel : si une fonction f est dérivable en un point a de son ensemble de définition, sa courbe représentative admet une tangente T_a , au point d'abscisse a , qui a pour équation : $T_a : y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

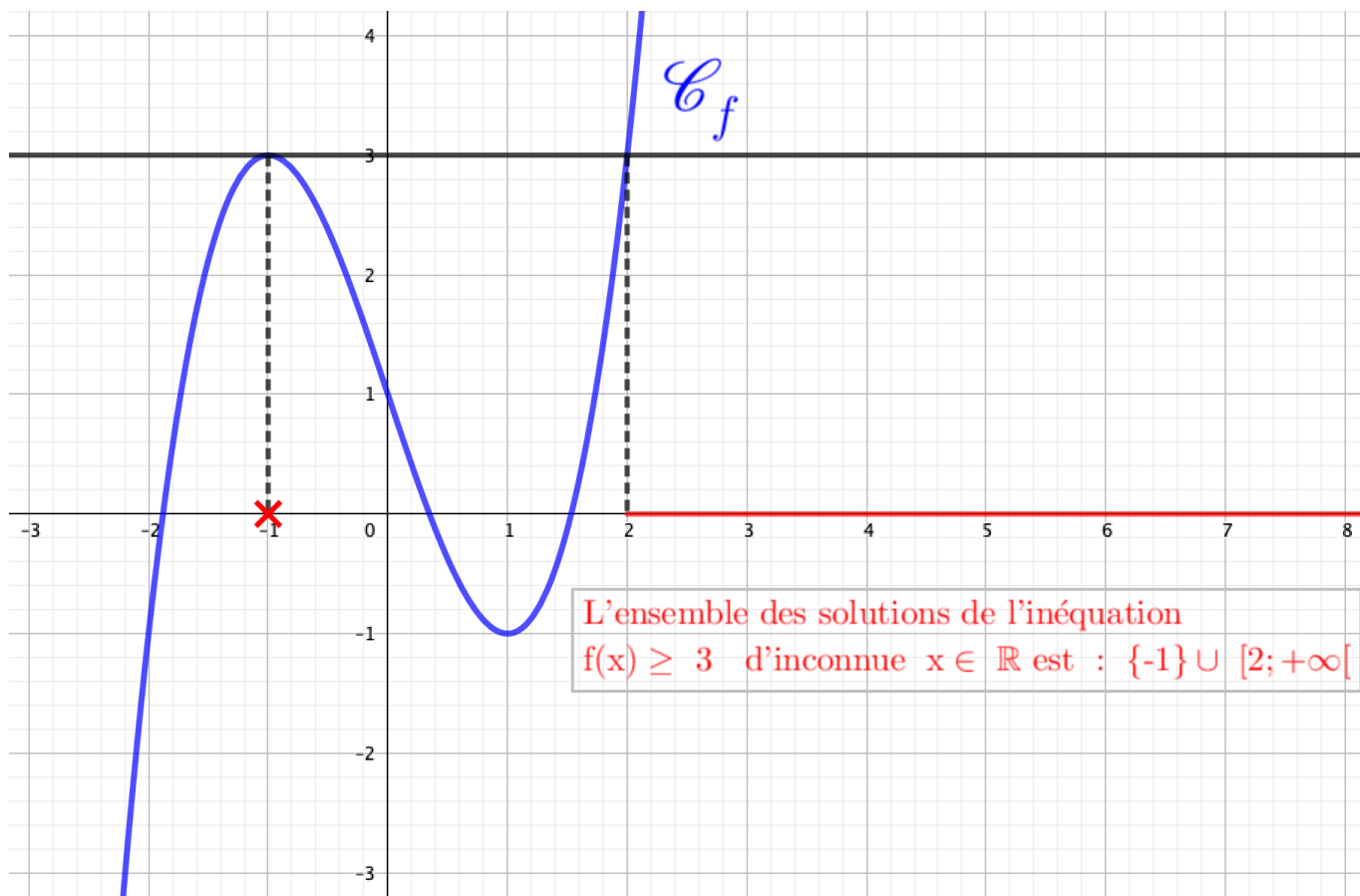
L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est donnée par : $T : y = f'(0)x + f(0)$

i.e. $T : y = -3x + 1$.

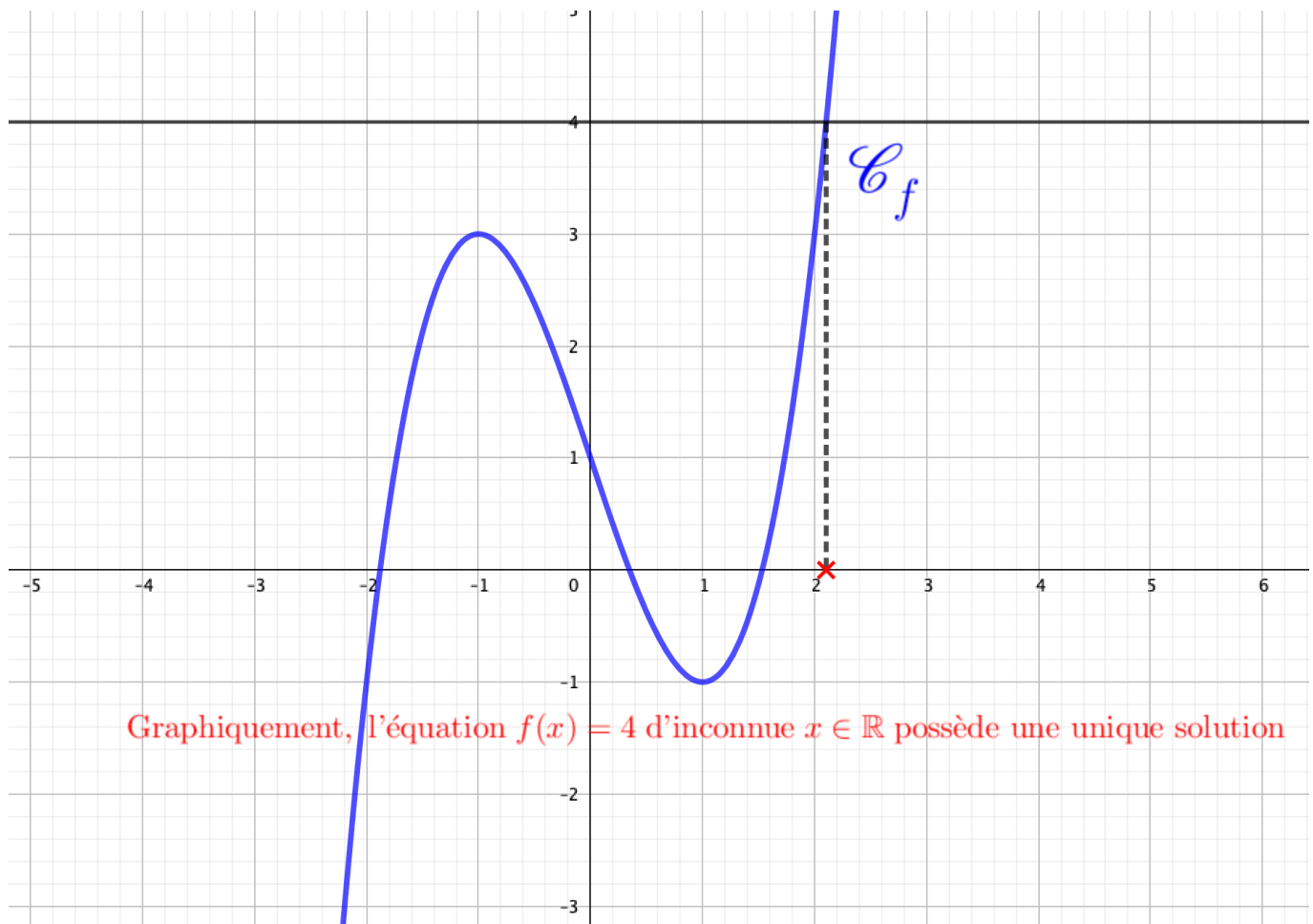
- 5.



6.



7.



Grâce au tableau de variation obtenu à la question 2., on sait que sur l'intervalle $] -\infty; 1]$ a pour maximum 3, ainsi l'équation $f(x) = 4$ ne possède aucune solution sur cet intervalle.

Sur l'intervalle $[1; +\infty[$, la fonction f est continue et strictement croissante. **Le théorème des valeurs intermédiaires (cas strictement monotone)** nous assure que tout élément de l'intervalle image $f([1; +\infty[) = [-1; +\infty[$ possède un unique antécédente par f . En particulier, comme $4 \in [-1; +\infty[$, 4 possède un unique antécédent par f appartenant à $[1; +\infty[$. Autrement dit, l'équation $f(x) = 4$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ possède une unique solution x_0 qui est dans $[1; +\infty[$. On peut obtenir une valeur approchée de cette solution à l'aide d'un tableur par exemple, on trouve $2.1 \leq x_0 \leq 2.2$.