Travail supplémentaire pour les vacances de Pâques

Les corrections seront mises en ligne le lundi 29 avril 2024

Exercice n°1 Probabilités : Première apparition de deux piles consécutifs (ECRICOME 2005)

On effectue une suite de lancers d'une pièce de monnaie (pas forcément équilibrée). On suppose que les résultats des lancers sont indépendants et qu'à chaque lancer, la pièce donne pile avec la probabilité p $(0 < p < 1)$ et face avec la probabilité $q = 1 - p$.
On s'intéresse dans cet exercice au moment où apparaissent pour la première fois deux piles consécutifs.

Pour tout entier naturel k non nul, on note :

- P_k l'événement « on obtient pile au k-ième lancer ».
- F_k l'événement « on obtient face au k-ième lancer ».

Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : « deux piles consécutifs apparaissent pour la première fois aux lancers numéros n et $n+1$ ». On pose alors :

- pour tout entier naturel n non nul, $a_n = P(A_n)$, la probabilité de A_n ;
- par convention, $a_0 = 0$.

Partie I : Encadrement des racines de l'équation caractéristique

On considère la fonction polynomiale f de la variable réelle x définie par :

$$f(x) = x^2 - qx - pq.$$

1. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ possède deux racines réelles distinctes r_1 et r_2 telles que $r_1 < r_2$.
2. Exprimer $r_1 + r_2$, $r_1 r_2$ en fonction de p et q.
3. Calculer $f(1)$, $f(-1)$, $f(0)$.
4. Montrer que $-1 < r_1 < 0 < r_2 < 1$.
5. Montrer que : $0 < |r_1| < |r_2| < 1$.

Partie II : Limite de (a_n) lorsque n tend vers l'infini

6. Déterminer a_1, a_2 et a_3 en fonction de p et q.
7. En remarquant que l'événement A_{n+2} est réalisé si et seulement si :
   - on a obtenu pile au premier tirage, face au deuxième tirage, et à partir de ce moment là, A_n est réalisé

     ou
   - on a obtenu face au premier tirage, et à partir de ce moment, A_{n+1} est réalisé.

   Montrer que l'on a, pour tout entier naturel n,
   $$a_{n+2} - qa_{n+1} - pqa_n = 0.$$
   Indication : On pourra considérer le système complet d'événements $\{F_1,\ P_1 \cap F_2,\ P_1 \cap P_2\}$.
8. Ecrire une fonction `suite(n,p,q)`, en langage Python, prenant en arguments un entier naturel n, les réels p, q et renvoyant la valeur de a_n.
9. Montrer que, pour tout entier naturel n,
   $$a_n = \frac{p^2}{r_2 - r_1}\left(r_2^n - r_1^n\right).$$
10. Déterminer la limite de a_n lorsque n tend vers l'infini.

Partie III : Expression de (a_n) en fonction de n par une méthode matricielle

On considère les matrices A et P :

$$A = \begin{bmatrix} r_1 + r_2 & -r_1 r_2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} r_1 & r_2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ainsi que les matrices colonnes X_n par :

$$X_n = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ a_n \end{bmatrix}.$$

On note I la matrice identité de taille 2.

11. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer X_{n+1} en fonction de A et de X_n.
12. Montrer que les matrices $A - r_1 I$ et $A - r_2 I$ ne sont pas inversibles.
13. Montrer que P est inversible et déterminer P^{-1}.
14. Expliciter la matrice $D = P^{-1}AP$.
15. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = P^{-1}A^n P$.
16. Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $X_n = PD^n P^{-1} X_0$.
17. Retrouver ainsi l'expression de a_n en fonction de r_1, r_2, p et n.

$\star\star\star$ **Fin exercice probabilités** $\star\star\star$

Un exercice préliminaire : L'inégalité triangulaire généralisée

On rappelle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \begin{cases} x & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ -x & \text{si} \quad x \leqslant 0 \end{cases}$ et que, de façon générale, $|x+y| \neq |x| + |y|$ (s'en convaincre sur un exemple). Par contre, on rappelle qu'on a l'inégalité suivante :

> **Th. (Inégalité triangulaire)**
> Pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $\quad |x+y| \leqslant |x| + |y|$.

Rem. En fait l'égalité $|x+y| = |x| + |y|$ sera vraie si et seulement si x et y sont de **même signe**.

On a également la généralisation suivante :

> **Th. (Inégalité triangulaire généralisée)**
> Soient $p, n \in \mathbb{N}$ tels que $p \leqslant n$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors :
> $$\left| \sum_{i=p}^{n} u_i \right| \leqslant \sum_{i=p}^{n} |u_i| \qquad \text{ie} \qquad |u_p + u_{p+1} + \ldots + u_n| \leqslant |u_p| + |u_{p+1}| + \ldots + |u_n|$$
> **Autrement dit :**
> La valeur absolue d'une somme de réels est inférieure ou égale à la somme des valeurs absolues de ces réels.

Question : En raisonnant par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geqslant p}$, démontrer ce théorème.

Exercice n°2 Analyse : Fonction contractante et théorème du point fixe (EDHEC 2023)

1. Donner un exemple, d'une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ pour laquelle il existe un réel K élément de $]0,1[$ tel que, pour tout couple (x, y) de réels, on ait :
$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y| \qquad (\star)$$

On considère pour toute la suite une fonction f vérifiant la condition $(\star)$ précédente. On dit que f est K-contractante.

2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

   Indication : Considérer $x_0 \in \mathbb{R}$ et montrer que f est continue en x_0. Conclure.
3. A l'aide de la relation $(\star)$, montrer par l'absurde que l'équation $f(x) = x$ admet au plus une solution.

   Indication : On supposera qu'il y a au moins deux solutions $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ telles que $\alpha \neq \beta$ et on aboutira à une contradiction.

4. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée du réel u_0 et la relation de récurrence, valable pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$|u_{n+1} - u_n| \leqslant K^n |u_1 - u_0|.$$
   (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \frac{1}{1-K}|u_1 - u_0|$.
   (c) Justifier la convergence de la série de terme général $u_{n+1} - u_n$ converge. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, on note a sa limite.
   (d) Conclure que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution.
5. On désigne par n et p des entiers naturels (avec $p \geqslant 1$).
   (a) Justifier que l'on a : $\displaystyle\sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} K^i |u_1 - u_0|$.
   (b) Montrer que
   $$|u_{n+p} - u_n| \leqslant \sum_{i=n}^{n+p-1} |u_{i+1} - u_i|.$$
   Indication : On utilisera l'inégalité triangulaire généralisée.
   (c) Déduire des deux questions précédentes l'inégalité :
   $$|u_{n+p} - u_n| \leqslant K^n \times \frac{1-K^p}{1-K}|u_1 - u_0|.$$
   (d) Etablir enfin l'inégalité suivante :
   $$|a - u_n| \leqslant \frac{K^n}{1-K} \times |u_1 - u_0|.$$
   Indication : « Passer » à la limite lorsque p tend vers l'infini dans chacun des membres de l'inégalité.
6. **Etude d'un exemple :** on considère la fonction f définie par :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ f(t) = \frac{1}{1+e^t}$$
   (a) Justifier que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f'(t)$ et justifier que f' est dérivable sur $\mathbb{R}$ puis calculer $f''(t)$, pour tout réel t.
   (b) Déterminer les variations de f' sur $\mathbb{R}$ et établir enfin l'inégalité :
   $$\forall t \in \mathbb{R},\ |f'(t)| \leqslant \frac{1}{4}$$
   (c) En déduire que f est $\frac{1}{4}$-contractante.
   (d) On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_0 = 0$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, valable pour tout entier naturel n. Montrer que cette suite est convergente. On note toujours a sa limite.
   (e) Compléter la fonction Python ci-dessous afin qu'elle renvoie, pour une valeur donnée de n, la valeur de u_n à l'appel de `suite(n)` :
   ```
   def suite(n):
        u=........
        for k in range(1,n+1):
            u=........
     return u
   ```
   (f) En s'appuyant sur le résultat de la question 5.(d), établir que u_n est une valeur approchée de a à moins de 10^{-3} près dès que n vérifie $4^n \geqslant 2000/3$.
   (g) En déduire un programme Python, utilisant la fonction précédente, qui calcule et affiche la valeur approchée de a qui en résulte.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin exercice analyse** ⋆ ⋆ ⋆