Travail des vacances d'Hiver en mathématiques

Exercice n°1 Révisions sur les fonctions et les suites récurrentes (sujet DS 2021-22)

On considère la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ telle que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.
On admet que f est dérivable sur son ensemble de définition.

On considère également la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 3 \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)} \end{cases}$$

Valeur numérique : on rappelle que $e = e^1 \approx 2,7$.

1. Pour tout $x \in]1;+\infty[$, calculer $f'(x)$ et justifier que le signe de $f'(x)$ est le signe de $\ln(x) - 1$.
2. Dresser le tableau de variation de f sur son ensemble de définition.
   Vous préciserez, en justifiant, les limites de f en 1^+ et $+\infty$.
3. Ecrire un programme python permettant de réaliser une représentation graphique de la fonction f sur le segment $[2;3]$. Cette représentation doit comporter un titre et une légende.
4. (a) Résoudre l'équation $f(x) = x$ sur $]1;+\infty[$.
   (b) Déterminer le signe de $f(x) - x$ sur $]1;+\infty[$.
5. (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant e$.
   (b) Justifier que la suite (u_n) est décroissante.
   (c) Démontrer que la suite (u_n) converge et justifier que sa limite est e.
6. L'objectif de cette question est de démontrer d'une autre manière que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} e$.
   (a) Montrer que, pour tout $x \in]1;+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{2}{\ln x}\right)^2$.
   (b) Justifier que, pour tout $x \in [e;+\infty[$, $-1 \leqslant 1 - \dfrac{2}{\ln x} \leqslant 1$.
   (c) En déduire que, pour tout $x \in [e;+\infty[$, $0 \leqslant f'(x) \leqslant \dfrac{1}{4}$.
   (d) **On admet que**, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :
   $$|u_{n+1} - e| \leqslant \frac{1}{4}|u_n - e|.$$
   Montrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|u_n - e| \leqslant \dfrac{1}{4^n}$.
   (e) Retrouver ainsi la convergence de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
7. Ecrire une fonction python prenant pour argument un réel $\varepsilon > 0$ et renvoyant la valeur du premier rang n tel que u_n soit une valeur approchée de e à ε près.

Exercice n°2 Etude d'une suite de matrices (sujet ECRICOME 2012 adapté)

On note $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels. Deux matrices A et B de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ étant données, on suppose qu'il existe une matrice L appartenant à $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que :

$$L = AL + B.$$

On définit la suite de matrices $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ de la manière suivante :

$$\begin{cases} U_0 \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \\ \forall n \in \mathbb{N}, \quad U_{n+1} = AU_n + B \end{cases}$$

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$U_n = L + A^n(U_0 - L).$$

Dans la suite du problème, les matrices A et B sont choisies de telle sorte que :

$$A = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -4 & 6 & 4 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

De plus, on considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

2. Calculer $P^3 - 2P^2 + P$. En déduire que P est inversible et préciser les 9 coefficients de P^{-1}.
3. Déterminer une matrice diagonale D telle que $PD = AP$ et une matrice B' telle que $PB' = BP$
4. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n = PD^nP^{-1}$.
5. En écrivant convenablement D^n comme la somme de trois matrices diagonales judicieusement choisies, prouver l'existence de trois matrices E, F, G de indépendantes de n telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$A^n = E + \left(\frac{1}{2}\right)^n F + \left(\frac{1}{3}\right)^n G.$$

   Expliciter uniquement les 9 coefficients de la matrice E.

6. Déterminer par le calcul, une matrice L' de la forme $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & q \\ 0 & 0 & r \end{bmatrix}$ telle que :

$$L' = DL' + B'$$

7. Montrer que la matrice $L = PL'P^{-1}$ vérifie :

$$L = AL + B$$

8. Etablir que $EL = 0$.
9. Montrer que chacun des coefficients de la matrice U_n a pour limite, lorsque n tend vers $+\infty$, les coefficients de la matrice $EU_0 + L$.

Exercice n°3 Commutant d'une matrice (sujet EML 2013 adapté)

Pour toute matrice $E \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$, on appelle **commutant de** E l'ensemble, noté $\mathcal{C}(E)$, des matrices d'ordre 4 qui commutent avec E. Autrement dit : $\mathcal{C}(E) = \{M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \mid EM = ME\}$.

On note $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

Partie I : Premiers éléments de $\mathcal{C}(A)$

1. Montrer que $0_4 \in \mathcal{C}(A)$.
2. Montrer que $B \in \mathcal{C}(A)$. Plus généralement, montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $B + xI_4 \in \mathcal{C}(A)$.
3. Justifier que $\mathcal{C}(A) \subset \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$ et que $\mathscr{M}_4(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}(A)$.

D'après la question précédente, $\mathcal{C}(A) \neq \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. L'objectif de la suite est de préciser les matrices de $\mathcal{C}(A)$.

Partie II : Explicitation des éléments de $\mathcal{C}(A)$

4. **Question facultative :** Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible si et seulement si $\lambda \in \{-2; -1; 1; 2\}$.
5. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
6. Justifier l'existence d'une matrice diagonale D d'ordre 4 telle que : $PD = AP$.
7. Soit $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}MP$. Montrer que :
$$M \in \mathcal{C}(A) \iff N \in \mathcal{C}(D).$$
8. Déterminer $\mathcal{C}(D)$, le commutant de D, en utilisant les coefficients des matrices.
9. En déduire que :
$$\mathcal{C}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix} \mid a, b, c, d \in \mathbb{R} \right\}.$$