Correction du travail des vacances d'hiver

Exercice n°1 : Voir correction DS n°3 2021-2022

Exercice n°2 :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, la proposition

$$\mathcal{P}(n) : \text{" } U_n = L + A^n(U_0 - L) \text{ "}$$

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $L + A^0(U_0 - L) = L + I_3(U_0 - L)$
$$= L + (U_0 - L)$$
$$= U_0 .$$

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$U_{n+1} = AU_n + B$ [par définition de (U_n)]

$= A(L + A^n(U_0 - L)) + B$ [par hypothèse de récurrence]

$= AL + A^{n+1}(U_0 - L) + B$

$= L + A^{n+1}(U_0 - L)$ [car $L = AL + B$ par hypothèse]

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Après calculs : $P^2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ et $P^3 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & -1 \\ 5 & 3 & -2 \end{bmatrix}$.

Ainsi $\underline{P^3 - 2P^2 + P = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = -I_3}$.

On en déduit que : $-P^3 + 2P^2 - P = I_3$

ie $P(-P^2 + 2P - I_3) = I_3$.

Ainsi il existe une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $PC = I_3$, ici $C = -P^2 + 2P - I_3$. On en déduit que P est inversible et que $P^{-1} = C = -P^2 + 2P - I_3$.

Conclusion : après calculs $\underline{P^{-1} = -P^2 + 2P - I_3 = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}$

3) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$.

On a :

$$PD = AP \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & -\lambda_3 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & -1/3 \\ 1 & 1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \iff \begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1/2 \\ \lambda_3 = 1/3 \end{cases}$$

Donc : $\underline{D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix} = \mathrm{diag}\left(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)}$.

Soient $a, b, c, d, e, f, g, h, i \in \mathbb{R}$ et $B' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$.

On a :

$$PB' = BP \iff \begin{bmatrix} a+d & b+e & c+f \\ a-g & b-h & c-i \\ a+d+g & b+e+h & c+f+i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} a+d = 0 \\ a-g = 0 \\ a+d+g = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b+e = 1 \\ b-h = 0 \\ b+e+h = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} c+f = -1 \\ c-i = -1 \\ c+f+i = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} d = 0 \\ a = 0 \\ g = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} b = 0 \\ h = 0 \\ e = 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} f = -1 \\ c = 0 \\ i = 1 \end{cases}$$

Donc : $B' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

4) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition :

$$\mathcal{P}(n) : \text{" } A^n = P D^n P^{-1} \text{ "}$$

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $P D^0 P^{-1} = P I_3 P^{-1} = P P^{-1} = I_3 = A^0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned} A^{n+1} = A \times A^n &= A\left(P D^n P^{-1}\right) \quad [\text{par hypothèse de récurrence}] \\ &= \left(P D P^{-1}\right)\left(P D^n P^{-1}\right) \quad [\text{car } PD = AP \iff A = PDP^{-1}] \\ &= P D P^{-1} P D^n P^{-1} \\ &= P D D^n P^{-1} \\ &= P D^{n+1} P^{-1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 & 0 \\ 0 & (1/2)^n & 0 \\ 0 & 0 & (1/3)^n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Le résultat de la question précédente nous assure que :

$$A^n = P D^n P^{-1} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^n P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n P \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} P^{-1}$$

On obtient la décomposition souhaitée en posant :

$$E = P\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1} = \begin{bmatrix}-1&1&1\\-1&1&1\\-1&1&1\end{bmatrix}$$

$$F = P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}P^{-1} \text{ et } G = P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}P^{-1}.$$

6) Soient $p, q, r \in \mathbb{R}$ et $L' = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&p&q\\0&0&r\end{bmatrix}$.

Or a :

$$L' = DL' + B' \iff \begin{bmatrix}0&0&0\\0&p&q\\0&0&r\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&p/2&q/2\\0&0&r/3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases}p = \frac{p}{2}+1\\ q = \frac{q}{2}-1\\ r = \frac{r}{3}+1\end{cases} \iff \begin{cases}p=2\\ q=-2\\ r=\frac{3}{2}\end{cases}$$

Donc $\underline{L' = \begin{bmatrix}0&0&0\\0&2&-2\\0&0&3/2\end{bmatrix}}$.

7) Par la question précédente, on a :

$L' = DL' + B'$ ainsi $PL'P^{-1} = PDL'P^{-1} + PB'P^{-1}$

ou encore : $PL'P^{-1} = (PDP^{-1})(PL'P^{-1}) + PB'P^{-1}$.

Or $PL'P^{-1} = L$, $PDP^{-1} = A$ et, comme $PB' = BP$, on a $PB'P^{-1} = B$. Donc $\underline{L = AL + B}$.

8) Par la question 5), on a : $E = P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}$,

par la question 6), $L' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}$ et par la question 7), $L = PL'P^{-1}$. On a donc :

$$\begin{aligned} EL &= P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}P^{-1}PL'P^{-1} \\ &= P\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 3/2 \end{bmatrix}P^{-1} \\ &= P\,O_3\,P^{-1} \\ &= O_3 \end{aligned}$$

9) Comme $\left(\frac{1}{2}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$ et $\left(\frac{1}{3}\right)^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, les coefficients de la matrice A^n tendent vers ceux de la matrice E d'après la question 5). Or, d'après la question 1) : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = L + A^n(U_0 - L)$. Donc les coefficients de U_n tendent vers ceux de la matrice $L + E(U_0 - L)$ ou encore, car $EL = 0$, ceux de $\underline{L + EU_0}$.

Exercice n°3 :

Partie I : 1) On a : $O_4 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $AO_4 = O_4 = O_4A$. Donc $\underline{O_4 \in \mathcal{C}(A)}$.

2) On a $B \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $AB = BA$, en effet :

$$AB = \begin{bmatrix} -4 & 0 & 0 & 8 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -4 \end{bmatrix} = BA.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $B + xI_4 \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et

$A(B + xI_4) = AB + A(xI_4) = BA + xA = (B + xI_4)A.$

Donc $\underline{B + xI_4 \in \mathcal{C}(A)}$.

3) Toute matrice de $\mathcal{C}(A)$ est carrée d'ordre 4, donc $\mathcal{C}(A) \subset \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$

D'autre part $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ mais $C \notin \mathcal{C}(A)$,

en effet : $CA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ et $AC = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Donc $\underline{\mathcal{M}_4(\mathbb{R}) \not\subset \mathcal{C}(A)}$.

Partie II :

4) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La matrice $A - \lambda I_4$ est inversible si et seulement si le système linéaire homogène associé est de Cramer.

Soit $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4,1}(\mathbb{R})$, on a :

$$(A - \lambda I_4)X = 0_{4,1} \iff \begin{cases} -\lambda x + 2t = 0 \\ -\lambda y + z = 0 \\ y - \lambda = 0 \\ 2x - \lambda t = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_4}{\iff}} \begin{cases} 2x - \lambda t = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ -\lambda y + z = 0 \\ -\lambda x + 2t = 0 \end{cases}$$

7

$\overset{L_2 \leftarrow \frac{1}{2}L_2,\ L_4 \leftarrow L_4+\lambda L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - \frac{\lambda}{2}t = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ -\lambda y + z = 0 \\ \left(2 - \frac{\lambda^2}{2}\right)t = 0 \end{cases} \overset{L_3 \leftarrow L_3+\lambda L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - \frac{\lambda}{2}t = 0 \\ y - \lambda z = 0 \\ (1-\lambda^2)z = 0 \\ \left(2-\frac{\lambda^2}{2}\right)t = 0 \end{cases}$

Ce dernier système linéaire est échelonné et sera de Cramer ssi il possède 4 pivots non nuls. Autrement dit lorsque :

$$1-\lambda^2 \neq 0 \quad \text{et} \quad 2 - \frac{\lambda^2}{2} \neq 0.$$

Comme $1-\lambda^2 = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{1;-1\}$ et $2-\frac{\lambda^2}{2} = 0 \Longleftrightarrow \lambda \in \{2;-2\}$

on a : $A - \lambda I_4$ n'est pas inversible ssi $\lambda \in \{1;-1;2;-2\}$

5) Soient $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a :

$PX = Y \Longleftrightarrow \begin{cases} x + t = a \\ y + z = b \\ -y + z = c \\ -x + t = d \end{cases} \overset{L_4 \leftarrow L_4+L_1,\ L_3 \leftarrow L_3+L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x + t = a \\ y + z = b \\ 2z = b+c \\ 2t = a+d \end{cases}$

cette matrice échelonnée possède 4 pivots non nuls donc A est inversible

$\Longleftrightarrow \begin{cases} x = a - t = \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}d \\ y = b - z = \frac{1}{2}b - \frac{1}{2}c \\ z = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}c \\ t = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}d \end{cases}$

$\Longleftrightarrow X = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} Y$

Donc $P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

6) Soient $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ et $D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix}$.

On a :

$$PD = AP \iff \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \\ 0 & \lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ 0 & -\lambda_2 & \lambda_3 & 0 \\ -\lambda_1 & 0 & 0 & \lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = -1 \\ \lambda_3 = 1 \\ \lambda_4 = 2 \end{cases}$$

Donc $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

7) Soit $M \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. Comme $PD = AP \iff A = PDP^{-1}$ et $N = P^{-1}MP \iff M = PNP^{-1}$, on a :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C}(A) &\iff AM = MA \\ &\iff (PDP^{-1})(PNP^{-1}) = (PNP^{-1})(PDP^{-1}) \\ &\iff PDNP^{-1} = PNDP^{-1} \\ &\iff (P^{-1}P)DN(P^{-1}P) = (P^{-1}P)ND(P^{-1}P) \\ &\iff DN = ND \\ &\iff N \in \mathcal{C}(D) \end{aligned}$$

8) Soit $N = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ i & j & k & l \\ m & n & o & p \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$. On a :

$$\begin{aligned} N \in \mathcal{C}(D) &\iff DN = ND \\ &\iff \begin{bmatrix} -2a & -2b & -2c & -2d \\ -e & -f & -g & -h \\ i & j & k & l \\ 2m & 2n & 2o & 2p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2a & -b & c & 2d \\ -2e & -f & g & 2h \\ -2i & -j & k & 2l \\ -2m & -n & o & 2p \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} -e = -2e \\ i = -2i \\ 2m = -2m \\ j = -j \\ 2n = -n \\ 2o = o \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -2b = -b \\ -2c = c \\ -2d = 2d \\ -g = g \\ -h = 2h \\ l = 2l \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow e = i = m = j = n = o = b = c = d = g = h = l = 0$$

Donc $N = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix}$ où a, f, k, p sont des paramètres réels libres.

Autrement dit, $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices carrées d'ordre 4 diagonales.

9) D'après la question 7), $M \in \mathcal{C}(A) \Longleftrightarrow N = P^{-1}MP \in \mathcal{C}(D)$

or, d'après la question 8), $\mathcal{C}(D)$ est l'ensemble des matrices d'ordre 4 diagonales. Comme $N = P^{-1}MP \Longleftrightarrow M = PNP^{-1}$, les matrices M du commutant de A s'écrivent

$$M = P \begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & f & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{bmatrix} P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{a+p}{2} & 0 & 0 & \frac{-a+p}{2} \\ 0 & \frac{f+k}{2} & \frac{-f+k}{2} & 0 \\ 0 & \frac{-f+k}{2} & \frac{f+k}{2} & 0 \\ \frac{-a+p}{2} & 0 & 0 & \frac{a+p}{2} \end{bmatrix}$$

où a, f, k, p décrivent $\mathbb{R}$.

Ainsi les matrices de $\mathcal{C}(A)$ sont bien de la forme $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ 0 & d & c & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$ avec $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toute matrice de ce type commute bien avec A.