Corrections des exercices de révision

Exercice n° 1 :

Partie I

1) (a) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned} f(x) = x &\iff x - \ln(1+x^2) = x \\ &\iff \ln(1+x^2) = 0 \\ &\iff 1+x^2 = 1 \\ &\iff x^2 = 0 \\ &\iff x = 0 \end{aligned}$$

L'unique point fixe de f est $x = 0$

(b) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a : $f'(x) = 1 - \dfrac{2x}{1+x^2} = \dfrac{1+x^2-2x}{1+x^2} = \dfrac{(x-1)^2}{1+x^2} \geqslant 0$.

(c) D'après le résultat précédent f est croissante sur $\mathbb{R}$.

De plus : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ et on a :

$$\begin{aligned} f(x) = x - \ln(1+x^2) &= x - \ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) = x - \ln(x^2) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x - 2\ln(x) - \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right) \\ &= x\left(1 - 2\frac{\ln|x|}{x} - \frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right) \\ &\xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty \end{aligned}$$

car $\dfrac{\ln x}{x} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$ par croissances comparées

Donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

(d)

```
from math import *
def fonction(x):
    return x - log(1+x**2)
```

Partie II

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: " $u_{n+1} \leqslant u_n$ ".

- $P(0)$ vraie car : $u_1 = u_0 - \ln(1+u_0^2) = u_0 - \ln(2)$ et comme $0 < \ln 2$ on obtient $u_1 \leqslant u_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence $u_{n+1} \leqslant u_n$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ par 1)(c), on déduit que $f(u_{n+1}) \leqslant f(u_n)$ ie $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$. Donc $P(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $u_n \geqslant 0$ "

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $u_0 = 1 \geqslant 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence $u_n \geqslant 0$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}$ par 1)(c) on déduit que $f(u_n) \geqslant f(0)$ i.e. $u_{n+1} \geqslant 0$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) La suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est décroissante et minorée par 0, le théorème de la limite monotone nous assure que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ converge vers une limite $\ell \geqslant 0$.

On en déduit que : $u_{n+1} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \ell$ et que $f(u_n) = u_n - \ln(1+u_n^2)$

$$\xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell - \ln(1+\ell^2) = f(\ell)$$

Ainsi, par passage à la limite dans la relation : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$, on obtient :

$$\ell = f(\ell)$$

Autrement dit ℓ est nécessairement un point fixe de f, comme 0 est l'unique point fixe de f par 1), on a : $\underline{\ell = 0}$.

4)(a)

```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(n):
        u = fonction(u)
    return u
```

(b)

```
def seuil(eps):
    n = 0
    while suite(n) > eps:
        n += 1
    return n
```

5)(a) On considère la fonction $g : x \mapsto x - \frac{1}{2}x^2 - f(x)$ définie et dérivable sur $[0,1]$.

On a : $\forall x \in [0,1]$, $g(x) = \ln(1+x^2) - \frac{1}{2}x^2$. On en déduit que :

$\forall x \in [0,1]$, $g'(x) = \dfrac{2x}{1+x^2} - x = \dfrac{x(1-x^2)}{1+x^2} \geqslant 0$ (car $x \geqslant 0$, $x^2 \leqslant 1$ et $1+x^2 \geqslant 0$ sur $[0,1]$)

La fonction g est donc croissante sur $[0,1]$, comme $g(0) = 0$, on en déduit que :

$\forall x \in [0,1]$, $g(0) \leqslant g(x)$ i.e. $0 \leqslant x - \frac{1}{2}x^2 - f(x)$. Ce qu'il fallait montrer.

(b) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de premier terme 1 et minorée par 0, donc : $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k\in[0,1]$. Par conséquent, en appliquant l'inégalité démontrée à la question précédente, on obtient : $\forall k\in\mathbb{N},\ f(u_k)\leqslant u_k-\frac{1}{2}u_k^2$

ie $u_{k+1}\leqslant u_k-\frac{1}{2}u_k^2$ ou encore $\frac{1}{2}u_k^2\leqslant u_k-u_{k+1}$.

Donc : $\forall k\in\mathbb{N},\ u_k^2\leqslant 2(u_k-u_{k+1})$.

(c) i) Soit $n\in\mathbb{N}$. On a : $w_{n+1}-w_n=\sum_{k=0}^{n+1}u_k^2-\sum_{k=0}^{n}u_k^2=u_{n+1}^2\geqslant 0$

Donc $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

ii) Soit $n\in\mathbb{N}$. Par b) on a : $\forall k\in[\![0,n]\!],\ u_k^2\leqslant 2(u_k-u_{k+1})$.

En sommant ces inégalités membre à membre, on obtient :

$\sum_{k=0}^{n}u_k^2\leqslant 2\sum_{k=0}^{n}(u_k-u_{k+1})$. La somme du membre de droite est télescopique, on obtient : $w_n\leqslant 2(u_0-u_{n+1})\leqslant 2u_0$ [car $u_n\geqslant 0$].

Donc $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est majorée par $2u_0=2$.

iii) La suite $(w_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante et majorée par 2, le théorème de la limite monotone nous assure que $(w_n)_{n\geqslant 0}$ converge.

Exercice n°2 :

1) $M^2=\begin{bmatrix}4/9&0&0\\0&2/9&2/9\\0&2/9&2/9\end{bmatrix}$ et $M^3=\begin{bmatrix}0&8/27&8/27\\4/27&0&0\\4/27&0&0\end{bmatrix}=\frac{4}{9}M$.

Raisonnons par l'absurde et supposons que M est inversible. Dans ce cas on déduirait de $M^3=\frac{4}{9}M$ que $M^{-1}M^3=\frac{4}{9}M^{-1}M$ ie $M^2=\frac{4}{9}I_3$, or on sait que $M^2\neq\frac{4}{9}I_3$, il y a donc contradiction et M n'est pas inversible.

2) Montrons que P est inversible et déterminons P^{-1}.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L}{\overset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} \boxed{1} & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{-4} & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-2} & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

[3 pivots non nuls, P est inversible]

$$\underset{L}{\overset{\substack{L_2 \leftarrow -\frac{1}{4} L_2 \\ L_3 \leftarrow -\frac{1}{2} L_3}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \underset{L}{\overset{\substack{L_1 \leftarrow L_1 - L_3 \\ L_2 \leftarrow L_2 - \frac{1}{2} L_3}}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$\underset{L}{\overset{L_1 \leftarrow L_1 - L_2}{\sim}} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & 0 & -1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right]$$

$$P^{-1} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$$

3) $M = PDP^{-1} \iff D = P^{-1}MP$. Après calculs, on trouve $D = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 0 \\ 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad D^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} (2/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{pour } n \geq 1 \\ I_3 & \text{pour } n = 0 \end{cases}$$

4) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $M^n = PD^nP^{-1}$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vraie car $M^0 = I_3 = PP^{-1} = PD^0P^{-1}$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Or a : $M^{n+1} = M^n M = (PD^nP^{-1})(PDP^{-1})$ [par hypothèse de récurrence]

$= PD^nDP^{-1}$

$= PD^{n+1}P$ Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

$$\begin{array}{c|c|c} & \begin{bmatrix} (2/3)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-2/3)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{bmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 2(2/3)^n & -2(-2/3)^n & 0 \\ (2/3)^n & (-2/3)^n & 0 \\ (2/3)^n & (-2/3)^n & 0 \end{bmatrix} & \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 2(2/3)^n + 2(-2/3)^n & x & x \\ (2/3)^n - (-2/3)^n & x & x \\ (2/3)^n - (-2/3)^n & x & x \end{bmatrix} \end{array}$$

Ce résultat reste vrai dans le cas $n = 0$.

6) On retrouve le résultat proposé au DM n°7.