# Travail des vacances de Noël en mathématiques

- **Programme du DS n°3 (du 9 janvier 2023) :**
  - — Suites usuelles (suites arithmétiques, géométriques, arithmético-géométriques, linéaires récurrentes d'ordre deux).
  - — Sommes, produits et récurrence (principe de récurrence simple, double ; connaître les formules des sommes usuelles et savoir les démontrer par récurrence ; propriétés des sommes ; sommes télescopiques).
  - — Généralités sur les fonctions et inégalités (méthodes pour démontrer une inégalités ; fonctions paires, impaires ; étude d'une suite récurrente du type $u_{n+1} = f(u_n)$).
  - — Systèmes linéaires (savoir résoudre et écrire l'ensemble des solutions d'un système linéaire, systèmes linéaires à paramètres).
  - — Python (savoir définir une fonction ; savoir réaliser un graphique avec titre et légende ; boucle for et while : algorithme pour déterminer la valeur du terme de rang $n$ d'une suite (définie explicitement, par récurrence, par une somme), algorithme de seuil).

- **Exercices de révision pour le DS n°3, à travailler pour le mardi 3 janvier 2023**
  **Une correction de ces exercices sera disponible en ligne à partir du mercredi 28 décembre 2022,**
  **certaines questions seront reprises en cours, mais pas toutes.**

### Exercice n°1 Calculs de limites

Terminer l'exercice sur l'utilisation des croissances comparées commencé en cours.

### Exercice n°2 Récurrence, suite et somme

1. **Suite linéaire récurrente d'ordre $2$ :** La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_0 = 5$, $u_1 = 7$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $10u_{n+2} = 13u_{n+1} - 3u_n$. Déterminer la formule explicite de $u_n$.
2. **Suite arithmético-géométrique :** La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $v_0 = -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = \dfrac{1 + 3v_n}{4}$. Déterminer la formule explicite de $v_n$.
3. **Récurrence et somme télescopique :**
   (a) Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$.
   (b) Déterminer deux réels $a$ et $b$ tels que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\dfrac{1}{k(k+1)} = \dfrac{a}{k+1} + \dfrac{b}{k}$.
   (c) Revoir le résultat du cours sur les sommes télescopiques.
   (d) En déduire une autre démonstration du résultat de la question a) (sans récurrence) à l'aide des résultats des deux questions précédentes.
4. **Somme double :** Justifier, par un calcul direct, que

$$\sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} (i+1)j = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}.$$

**Exercice n°3 Généralités sur les fonctions et inégalités (TD6 exercice n°6)**

On considère la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$ définie sur $\mathbb{R}$.

*On admet que $f$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

1. Montrer que $f$ est paire.
2. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$.
3. Etablir le tableau des variation de $f$.
4. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\dfrac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0$.
5. Montrer que : $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ -\dfrac{1}{3}x + \dfrac{1}{4} \leqslant f(x)$.

**Exercice n°4 Système linéaire à paramètre**

On considère le système linéaire $(S) \left\{ \begin{array}{l} (1-k)x - y + 2z = 0 \\ x - (1+k)y + 2z = 0 \\ x - y + (2-k)z = 0 \end{array} \right.$ où $k \in \mathbb{R}$ est un paramètre.

1. Montrer que le système linéaire $(S)$ est de Cramer si et seulement si $k \in \mathbb{R} - \{0; 2\}$.
2. Résoudre le système linéaire $(S)$ en fonction de $k \in \mathbb{R}$ (trois cas sont à traiter).

- $\boxed{\textbf{Programme du concours blanc n°1 (du 16 janvier 2023) :}}$

  — Tout ce qui a été réalisé depuis le début de l'année (voir programmes des DS n°1, 2 et 3).

- $\boxed{\textbf{En préparation du concours blanc, faire le DM n°5 pour le mardi 10 janvier 2023}}$

  — Le DM n°5 est composé de deux exercices tirés de sujet de concours. Je vous laisse trois semaines pour les travailler, il est fortement conseillé de commencer à les travailler pendant les vacances de Noël. Vous pouvez me poser vos questions par mail.