Corrections des exercices préparatoires au DS n°3

Exercice n°1 :

La correction sera réalisée en cours.

Exercice n°2 :

1) Réponse : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \frac{55}{7} - \frac{20}{7}\left(\frac{3}{10}\right)^n$.

2) Réponse : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_n = 1 - 2\left(\frac{3}{4}\right)^n$.

3) a) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, la proposition

$\mathcal{P}(n)$: " $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$ "

- $\mathcal{P}(1)$ est vraie car $\displaystyle\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2}$

et $\displaystyle\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{n}{n+1}$, ainsi :

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n(n+2)+1}{(n+1)(n+2)}$$

$$= \frac{n^2+2n+1}{(n+1)(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n+2}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\frac{a}{k+1} + \frac{b}{k} = \frac{ak + b(k+1)}{k(k+1)} = \frac{(a+b)k + b}{k(k+1)}.$$

Ainsi, en choisissant a et b tels que : $a+b=0$ et $b=1$, ie $a=-1$ et $b=1$
on a bien la relation : $\forall k \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad \dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1} = \dfrac{1}{k(k+1)}$.

c) Soient $n, p \in \mathbb{N}$ avec $p \leq n$ et $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite réelle.

(i) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_k - u_{k+1}) = u_p - u_{n+1}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=p}^{n} (u_{k+1} - u_k) = u_{n+1} - u_p$

d) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) \quad \text{[grâce à la question b)]}$$

$$= \frac{1}{1} - \frac{1}{n+1} \quad \text{[On a reconnu une somme télescopique.]}$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{(n+1)-1}{n+1}$$

$$= \frac{n}{n+1}$$

4) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} (i+1)j \overset{(*)}{=} \sum_{i=0}^{j-1} \sum_{j=i+1}^{n} (i+1)j$$

et $$\sum_{0 \leq i < j \leq n} (i+1)j \overset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} (i+1)j$$

Les deux relations peuvent être utilisées mais la seconde semble plus pratique :

$$\sum_{0 \leq i < j \leq n} (i+1)j \overset{(**)}{=} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{j-1} (i+1)j$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i=0}^{j-1} (i+1)$$

$$\overset{i'=i+1}{=} \sum_{j=1}^{n} j \sum_{i'=1}^{j} i'$$

$$= \sum_{j=1}^{n} j \frac{j(j+1)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{n} j^3 + \sum_{j=1}^{n} j^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\right]$$

$$= \frac{1}{24}\left[3n^2(n+1)^2 + 2n(n+1)(2n+1)\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{24}\left[3n(n+1) + 2(2n+1)\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{24}\left[3n^2 + 7n + 2\right] = \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{24}$$

Exercice n°3 :

1) La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ qui est centré en 0.
Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f(-x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} = \frac{e^{-x} \times e^{2x}}{(1+e^{-x})^2 \times e^{2x}}$$
$$= \frac{e^{x}}{(1+e^{-x})^2 (e^x)^2}$$
$$= \frac{e^{x}}{\left((1+e^{-x})e^x\right)^2}$$
$$= \frac{e^{x}}{(e^x+1)^2} = f(x)$$

Donc f est paire.

2) Soit $x \in \mathbb{R}$. On a :

$$f'(x) = \frac{(e^x)'(1+e^x)^2 - e^x\left((1+e^x)^2\right)'}{\left((1+e^x)^2\right)^2}$$
$$= \frac{e^x(1+e^x)^2 - e^x\left(2e^x(1+e^x)\right)}{(1+e^x)^4}$$
$$= \frac{e^x(1+e^x) - 2e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$
$$= \frac{e^x - e^{2x}}{(1+e^x)^3}$$
$$= \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

3) Soit $x \in \mathbb{R}$. Le signe de $f'(x)$ est le signe de $1-e^x$ car $e^x > 0$ et $(1+e^x)^3 > 0$.

Or : $1 - e^x \geq 0 \iff 1 \geq e^x \iff 0 \geq x$

Donc : $f'(x) \geq 0 \iff 0 \geq x$.

On en déduit le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	↗	$1/4$	↘	0

De plus :

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} = 0$
- $\frac{e^x}{(1+e^x)^2} = \frac{e^x}{e^{2x}(e^{-x}+1)^2} = \frac{1}{e^x(e^{-x}+1)^2} \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$
- $f(0) = \frac{e^0}{(1+e^0)^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Rem. : On aurait aussi pu construire le tableau sur $]-\infty; 0]$ et compléter la partie sur $[0; +\infty[$ par symétrie en invoquant la parité de f.

4) Soit $x \in \mathbb{R}_+$. D'après l'étude précédente, on sait que $f'(x) \leq 0$.

Montrons que : $-\frac{1}{3} \leq f'(x)$.

On a :

$$f'(x) + \frac{1}{3} = \frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{3e^x(1-e^x) + (1+e^x)^3}{3(1+e^x)^3}$$

$$= \frac{e^{3x} + 6e^x + 1}{3(1+e^x)^3} \geq 0$$

car $e^{3x} + 6e^x + 1 \geq 0$ et $3(1+e^x)^3 \geq 0$

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad -\frac{1}{3} \leqslant f'(x) \leqslant 0.$

5) Montrons que : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 \leqslant f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$.

On considère la fonction g définie (et dérivable) sur $\mathbb{R}_+$ par : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$.

Or a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g'(x) = f'(x) + \frac{1}{3} \geqslant 0$ par la question précédente. Ainsi g est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et, comme $g(0) = f(0) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = 0$, on obtient que :

$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad 0 = g(0) \leqslant g(x)$ ie $0 \leqslant f(x) + \frac{1}{3}x - \frac{1}{4}$,

ou encore $-\frac{1}{3}x + \frac{1}{4} \leqslant f(x)$.

Exercice n°4 :

1) Soient $k \in \mathbb{R}$ et $x, y, z \in \mathbb{R}$. On a :

$$(S) \underset{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - (1+k)y + 2z = 0 \\ (1-k)x - y + 2z = 0 \\ x - y + (2-k)z = 0 \end{cases} \underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 - (1-k)L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1}}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - (1+k)y + 2z = 0 \\ -k^2 y + 2kz = 0 \\ ky - kz = 0 \end{cases}$$

$$\underset{L_2 \leftrightarrow L_3}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} x - (1+k)y + 2z = 0 \\ ky - kz = 0 \\ -k^2 y + 2kz = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + kL_2}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} \boxed{1}x - (1+k)y + 2z = 0 \\ \boxed{k}y - kz = 0 \\ \boxed{k(2-k)}z = 0 \end{cases}$$

Le système linéaire carré (S) sera de Cramer si et seulement si le système linéaire échelonné obtenu possède 3 pivots non nuls. Autrement dit (S) est de Cramer si et seulement si $k \neq 0$ et $k(2-k) \neq 0$

Donc : $\underline{(S) \text{ de Cramer ssi } k \in \mathbb{R} \setminus \{0 ; 2\}}$.

2) ▫ On suppose que $k = 0$. Ainsi :

$$(S) \iff x - y + 2z = 0 \iff x = y - 2z.$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors : $\{(y-2z ; y ; z) \mid y, z \in \mathbb{R}\}$.

▫ On suppose que $k = 2$. Ainsi :

$$(S) \iff \begin{cases} x - 3y + 2z = 0 \\ 2y - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = 3y - 2z = z \\ y = z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S) est alors : $\{(z ; z ; z) \mid z \in \mathbb{R}\}$.

▫ On suppose que $k \neq 0$ et $k \neq 2$. Le système linéaire (S) étant homogène et de Cramer, il possède une unique solution qui ne peut être que $(0, 0, 0)$.