Exercice n°1 :

1) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a

$$(S_1)\begin{cases} 3x+3y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ x+2y+z=0 \end{cases} \underset{L_3\leftarrow 3L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow 3L_2-2L_1}{\iff}} \begin{cases} 3x+3y+2z=0 \\ -3y-z=0 \\ 3y+z=0 \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3+L_2}{\iff} \begin{cases} 3x+3y+2z=0 \\ -3y-z=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=-y-\frac{2}{3}z=-\frac{1}{3}z \\ y=-\frac{1}{3}z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions de (S_1) est :

$$\left\{\left(-\frac{1}{3}z,-\frac{1}{3}z,z\right)\,\middle|\, z\in\mathbb{R}\right\}$$

2) Soit $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$(S_2)\begin{cases} x+2y+z=a \\ 3x+5y-z=b \\ 4x+6y+4z=c \end{cases} \underset{L_3\leftrightarrow L_2}{\overset{\substack{L_2\leftarrow L_2-3L_1 \\ L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{\iff}} \begin{cases} x+2y+z=a \\ -y-4z=b-3a \\ -2y=c-4a \end{cases}$$

$$\overset{L_3\leftarrow L_3-2L_2}{\iff} \begin{cases} x+2y+z=a \\ -2y=c-4a \\ -8z=-2a+2b-c \end{cases} \iff \begin{cases} x=-\frac{13}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{7}{8}c \\ y=2a-\frac{1}{2}c \\ z=\frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}c \end{cases}$$

Le système linéaire (S_2) a pour unique solution

$$\left(-\frac{13}{4}a+\frac{1}{4}b+\frac{7}{8}c,\ 2a-\frac{1}{2}c,\ \frac{1}{4}a-\frac{1}{4}b+\frac{1}{8}c\right)$$

3) a) Soient $k\in\mathbb{R}$ et $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. On a :

$$(S_3)\begin{cases} (1-k)x+y+z=0 \\ x+(1-k)y+z=0 \\ x+y+(3-k)z=0 \end{cases} \overset{L_1\leftrightarrow L_2}{\iff} \begin{cases} x+(1-k)y+z=0 \\ (1-k)x+y+z=0 \\ x+y+(3-k)z=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-L_1}{\overset{L_2\leftarrow L_2-(1-k)L_1}{\iff}} \begin{cases} x+(1-k)y+z=0 \\ k(2-k)y+kz=0 \\ ky+(2-k)z=0 \end{cases}$$

$$\underset{L_3\leftarrow L_3-(2-k)L_2}{\overset{L_2\leftrightarrow L_3}{\iff}} \begin{cases} x+(1-k)y+z=0 \\ ky+(2-k)z=0 \\ (-4+5k-k^2)z=0 \end{cases}$$

Ce dernier système linéaire est échelonné et sera de Cramer si et seulement si il possède trois pivots non nuls, autrement dit lorsque : $k\neq 0$ et $-4+5k-k^2\neq 0$. Etant donné que $-4+5k-k^2=0 \iff k=1$ ou $k=4$, (S_3) sera de Cramer lorsque $k\in\mathbb{R}\setminus\{0,1,4\}$.

b) 1^{er} cas : $k \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1, 4\}$.

Dans ce cas (S_3) est de Cramer et homogène, sa seule solution est $\underline{(0,0,0)}$.

$2^{ème}$ cas : $k = 0$

$$(S_3) \iff \begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2z = 0 \\ -4z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -y \\ z = 0 \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\underline{\{(-y, y, 0) \mid y \in \mathbb{R}\}}$

$3^{ème}$ cas : $k = 1$

$$(S_3) \iff \begin{cases} x + z = 0 \\ y + z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -z \\ y = -z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\underline{\{(-z, -z, z) \mid z \in \mathbb{R}\}}$

$4^{ème}$ cas : $k = 4$

$$(S_3) \iff \begin{cases} x - 3y + z = 0 \\ 4y - 2z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 3y - z = \frac{1}{2} z \\ y = \frac{1}{2} z \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est : $\underline{\left\{\left(\frac{1}{2}z, \frac{1}{2}z, z\right) \mid z \in \mathbb{R}\right\}}$

Exercice n°2 :

1) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la propriété $P(n)$: " $2^n \geq n+1$ ".

- $P(1)$ est vrai car $2^1 = 2$ et $1+1 = 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.
  Par hypothèse de récurrence $2^n \geq n+1$, ainsi $2^{n+1} \geq 2(n+1)$ et donc $2^{n+1} \geq n+2+\underbrace{n}_{\geq 0} \geq n+2$. Donc $P(n+1)$ est vrai.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a :

- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} \geq 0$. Donc (u_n) est croissante.
- $v_{n+1} - v_n = u_{n+1} + \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{(n+1)2^{n+1}} - u_n - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n2^n}$

$$= \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n2^n}$$

$$= \frac{n+1-2^n}{n(n+1)2^n} \leq 0 \quad \left[\text{car } n+1 \leq 2^n \text{ par la question 1)}\right]$$

Donc (v_n) décroissante.

- $v_n - u_n = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n2^n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

<u>Conclusion :</u> Les suites (u_n) et (v_n) sont adjacentes

b) Le Théorème des suites adjacentes nous assure que (u_n) et (v_n) convergent vers une même limite

3)
```
def suite1(n) :
    u = 0
    for k in range(1, n+1) :
        u = u + 1 / (k * 2 ** k)
    return u
```

Exercice n°3 :

Partie I :

1) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. On a : $f'(x) = (x+\ln x)' e^{x-1} + (x+\ln x)(e^{x-1})'$

$$= \left(1+\frac{1}{x}\right)e^{x-1} + (x+\ln x)(x-1)' e^{x-1}$$

$$\boxed{= \left(1+\frac{1}{x}+x+\ln x\right)e^{x-1}}$$

2) Notons g la fonction définie, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, par $g(x) = \ln x + \frac{1}{x}$.

La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et on a :

$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} = \frac{x-1}{x^2}$.

Le signe de $g'(x)$ est le signe de $x-1$ car $x^2 > 0$.

On déduit le tableau de variation suivant :

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$	1	$\nearrow$	

Donc : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g(x) \geq g(1) = 1 > 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x + \frac{1}{x} > 0$.

3) Soit $x \in \mathbb{R}_+^*$. D'après la question précédente, on a : $\ln x + \frac{1}{x} > 0$. Ainsi :

$\ln x + \frac{1}{x} + x + 1 > x + 1 \geq 1 > 0$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $\ln x + \frac{1}{x} + x + 1 > 0$

4) Le signe de $f'(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ est, d'après 1), le signe de $\ln x + \frac{1}{x} + x + 1$.

Or, d'après 3) cette expression est strictement positive. Donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5)

x	0		$+\infty$
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

- $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$

6)

```
import numpy as np
import pyplot.matplotlib as plt
x = np.arange(0.01, 5.01, 0.01)
y = (x + np.log(x)) * np.exp(x-1)
plt.plot(x, y, label = "fonction f")
plt.title("Tracé de la fonction f sur [0.01,5]")
plt.legend()
plt.show()
```

Partie II :

7) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $P(n)$: " u_n bien défini et $u_n \geqslant 2$ ".

- $P(0)$ vrai car $u_0 = 2$ donc u_0 bien défini par hypothèse et $u_0 \geqslant 2$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence u_n est bien défini et $u_n \geqslant 2$. En particulier, $u_n > 0$ donc $f(u_n) = u_{n+1}$ est bien défini. D'autre part, par 5), la fonction f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, ainsi de $2 \leqslant u_n$ on déduit que $f(2) \leqslant f(u_n)$ ie $(2+\ln 2)e^1 \leqslant u_{n+1}$. Comme $2 + \underbrace{\ln 2}_{\geqslant 0} \geqslant 2$ et $e^1 > 2$, on a : $(2+\ln 2)e^1 \geqslant 4 \geqslant 2$ d'où : $2 \leqslant u_{n+1}$. Donc $P(n+1)$ vrai.
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

8)
```
def suite2(n):
    u = 2
    for k in range(1, n+1):
        u = (u + log(u)) * exp(u-1)
    return u
```

9) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. On a : $e^{e^n - 1} \geqslant e^1 \iff e^n - 1 \geqslant 1 \iff e^n \geqslant 2$.
(Or $n \geqslant 1$ donc $e^n \geqslant e^1 \geqslant 2$). Ainsi la dernière inégalité étant vraie la première l'est par équivalence. On a bien $\underline{e^{e^n-1} \geqslant e}$.

Comme $f(e^n) = (e^n + n)\, e^{e^n - 1}$ et comme $e^n + n \geqslant e^n$, on déduit que $f(e^n) \geqslant e^n \times e^{e^n-1}$. L'inégalité $e^{e^n-1} \geqslant e$ démontrée précédemment nous permet de déduire : $f(e^n) \geqslant e^n \times e^{e^n-1} \geqslant e^n \times e = e^{n+1}$.

Conclusion : $\underline{\forall n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1},\ f(e^n) \geqslant e^{n+1}}$.

10) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$ la proposition $P(n)$: " $u_n \geqslant e^n$ ".

- $P(1)$ est vrai car $u_1 = (2+\ln 2)e^1$ et comme $2 + \ln 2 \geqslant 1$, on a bien : $u_1 \geqslant e^1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$. Supposons $P(n)$ et montrons $P(n+1)$.

  Par hypothèse de récurrence $u_n \geqslant e^n > 0$. Comme f est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ par 5), on déduit que $f(u_n) \geqslant f(e^n)$ ie $u_{n+1} \geqslant f(e^n)$. Le résultat de la question 9) nous assure que $u_{n+1} \geqslant f(e^n) \geqslant e^{n+1}$ et $P(n+1)$ est vrai
- Par le principe de récurrence $P(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geqslant 1}$.

Cette relation est également vraie dans le cas $n=0$ car $u_0 = 2$ et $e^0 = 1$.

11) Comme $e^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} +\infty$, le Théorème de minoration nous assure que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

12)
```
n = 0
While suite2(n) <= 10**2 :
        n = n + 1
print(n)
```

Exercice n°4 :

1) a) $B = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $B^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \end{bmatrix}$ et $B^3 = O_3$.

b) Par récurrence immédiate : $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 3}, \ B^n = O_3}$.

2) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $A^n = 3^n I_3 + n\, 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2$ "

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $A^0 = I_3$ et $3^0 I_3 + \underbrace{0.3^{0-1} B}_{O_3} + \underbrace{\frac{0(0-1)}{2} 3^{0-2} B^2}_{O_3} = I_3$.

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a :

$$\begin{aligned}
A^{n+1} &= A \times A^n \\
&= (B + 3I_3)\left(3^n I_3 + n\, 3^{n-1} B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2\right) \quad \text{[par hypothèse de récurrence]} \\
&= B(3^n I_3) + B(n 3^{n-1} B) + B\left(\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2\right) + (3I_3)(3^n I_3) + (3I_3)(n 3^{n-1} B) \\
&\quad + (3I_3)\left(\frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} B^2\right) \\
&= 3^n B + n 3^{n-1} B^2 + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \underbrace{B^3}_{= O_3} + 3^{n+1} I_3 + n 3^n B + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-1} B^2 \\
&= 3^{n+1} I_3 + (3^n + n 3^n) B + \left(n 3^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-1}\right) B^2 \\
&= 3^{n+1} I_3 + (n+1) 3^n B + \frac{(n+1)n}{2} 3^{n-1} B^2
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai.

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) On déduit que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
A^n &= 3^n \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + n\, 3^{n-1} \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \frac{n(n-1)}{2} 3^{n-2} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3^n & 2n\, 3^{n-1} & 2n\, 3^{n-1} \\ n 3^{n-1} & 3^n + n(n-1) 3^{n-2} & n(n-1) 3^{n-2} \\ -n 3^{n-1} & -n(n-1) 3^{n-2} & 3^n - n(n-1) 3^{n-2} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

4) a) $X_{n+1} = AX_n \iff \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{bmatrix} \iff \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + 2v_n + 2w_n \\ v_{n+1} = u_n + 3v_n \\ w_{n+1} = -u_n + 3w_n \end{cases}$

Cette dernière proposition étant vraie, la première l'est par équivalence.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ la proposition $\mathcal{P}(n)$: " $X_n = A^n X_0$ ".

- $\mathcal{P}(0)$ vrai car $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

On a : $X_{n+1} = AX_n$ [par 4) a)]

$= A . A^n X_0$ [par hypothèse de récurrence]

$= A^{n+1} X_0$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vrai

- Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c) Comme $X_0 = \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, les résultats des questions 4) b) et 3) nous assurent que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0 = \begin{bmatrix} 3^n & 2n\,3^{n-1} & 2n\,3^{n-1} \\ n\,3^{n-1} & 3^n + n(n-1)3^{n-2} & n(n-1)3^{n-2} \\ -n\,3^{n-1} & -n(n-1)3^{n-2} & 3^n - n(n-1)3^{n-2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2(n+3)\,3^{n-1} \\ (n^2 + 5n + 9)\,3^{n-2} \\ n(n-7)\,3^{n-2} \end{bmatrix}$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 2(n+3)\,3^{n-1}, \quad v_n = (6n + 9 + n(n-1))\,3^{n-2}$

$w_n = n(n-7)\,3^{n-2}$

Exercice n°5 :

1) a) $A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ et $A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

On a : $4A^2 - 4A = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 8 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 12 & 8 & 8 & 4 \\ 8 & 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 8 & 4 & 4 & 4 \\ 4 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} = A^3$

Donc $\underline{A^3 = 4A^2 - 4A}$.

b) Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$ la proposition

$\mathcal{P}(n)$: "il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$"

• $\mathcal{P}(1)$ est vrai car $A^1 = 0 \cdot A^2 + 1 \cdot A$. En posant $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$, on a bien $A^1 = a_1 A^2 + b_1 A$.

• Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$ et montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

Par hypothèse de récurrence, il existe $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ tels que : $A^n = a_n A^2 + b_n A$.

On en déduit que

$A^{n+1} = A A^n = A(a_n A^2 + b_n A) = a_n A^3 + b_n A^2$

$= a_n (4A^2 - 4A) + b_n A^2$ [par 1a)]

$= (4a_n + b_n) A^2 - 4a_n A$

En posant $a_{n+1} = 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} = -4a_n$, on a :

$A^{n+1} = a_{n+1} A^2 + b_{n+1} A$. Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vrai.

• Par le principe de récurrence $\mathcal{P}(n)$ est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$.

On en déduit également que : $\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$, $a_{n+1} \overset{(*)}{=} 4a_n + b_n$ et $b_{n+1} \overset{(**)}{=} -4a_n$.

2) a) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a : $a_{n+2} = 4a_{n+1} + b_{n+1}$ [grâce à la relation $(*)$]

$= 4a_{n+1} - 4a_n$ [grâce à la relation $(**)$]

b) D'après la question précédente, la suite $(a_n)_{n \geq 1}$ est linéaire récurrente d'ordre 2.

L'équation caractéristique associée est $x^2 = 4x - 4 \iff (x-2)^2 = 0$.

L'unique solution est 2. Par conséquent, il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1}, \quad a_n = (\lambda n + \mu) 2^n.$$

Déterminons λ et μ : (Remarquons que $a_2 = 4a_1 + b_1 = 4.0+1 = 1$)

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ a_2 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} (\lambda+\mu)\times 2 = 0 \\ (2\lambda+\mu)\times 4 = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = -\mu \\ \mu = -\frac{1}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = \frac{1}{4} \\ \mu = -\frac{1}{4} \end{cases}.$$

Conclusion: $\underbrace{\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ a_n = \left(\frac{1}{4}n - \frac{1}{4}\right)2^n = (n-1)2^{n-2}}$.

c) On déduit de la relation (*) obtenue à la question 1) b) et du résultat de la question précédente que:

$$\forall n \in \mathbb{N}^{\geq 1},\ b_n = a_{n+1} - 4a_n = ((n+1)-1)2^{(n+1)-2} - 4(n-1)2^{n-2}$$
$$= n2^{n-1} - (2n-2)2^{n-1}$$
$$= (2-n)2^{n-1}$$

3) Soit $n \in \mathbb{N}^{\geq 1}$. On a, par 1) b) :

$$A^n = a_n A^2 + b_n A$$
$$= \begin{bmatrix} 2a_n+b_n & 0 & 0 & 2a_n+b_n \\ 3a_n+b_n & 2a_n+b_n & 2a_n+b_n & a_n \\ 3a_n+b_n & 2a_n+b_n & 2a_n+b_n & a_n \\ 2a_n+b_n & 0 & 0 & 2a_n+b_n \end{bmatrix} \quad [\text{grâce à 1) a)}].$$

Enfin, comme $a_n = (n-1)2^{n-2}$ et $b_n = (2-n)2^{n-1} = (4-2n)2^{n-2}$ [par 2) b) et c)],

on a: • $2a_n + b_n = (n-1)2^{n-1} + (2-n)2^{n-1} = 2^{n-1}$

• $3a_n + b_n = (3n-3)2^{n-2} + (4-2n)2^{n-2} = (n+1)2^{n-2}$

et on conclut que:

$$\underbrace{A^n = \begin{bmatrix} 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ (n+1)2^{n-2} & 2^{n-1} & 2^{n-1} & (n-1)2^{n-2} \\ 2^{n-1} & 0 & 0 & 2^{n-1} \end{bmatrix}}.$$