Travail pour les vacances de Pâques

Les corrections seront mises en ligne le lundi 29 avril 2024

Exercice n°1 Méthodes numériques pour approcher la solution d'une équation

1. On donne : $0,69 < \ln(2) < 0,70$.

   On considère la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par :

   $$\forall x \in]0;+\infty[, \ g(x) = x^2 + \ln(x).$$

   (a) Démontrer rigoureusement que l'équation $g(x) = 0$, d'inconnue $x \in]0;+\infty[$, admet une unique solution. Dans la suite, on note α l'unique solution de cette équation.

   (b) Justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

2. **Première méthode pour approcher α : par dichotomie**

   (a) Recopier et compléter les fonction python `g` et `dichotomie` pour que le programme renvoie un encadrement de α de diamètre inférieur à `eps` :

```
import numpy as np
def g(x):
     y=.....
     return y
def dichotomie(a,b,eps):
     u=.....
     v=.....
     while.....
          c=(u+v)/2
          if.....
               .....
          else:
               .....
     return [u,v]
```

   (b) En utilisant ce programme, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

3. **Seconde méthode pour approcher α : à l'aide d'une suite récurrente**

   On donne $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$.

   On note $I = \left[\dfrac{1}{2};1\right]$ et on considère la fonction f définie sur I par :

   $$f(x) = x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4}\ln(x).$$

   (a) Montrer que f est strictement croissante sur I et en déduire que : $\forall x \in I, \ \dfrac{1}{2} \leqslant f(x) \leqslant 1$.

   (b) On considère la suite réelle $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

      (i) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in I$.

      (ii) Calculer u_1 puis démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. On pourra utiliser un raisonnement par récurrence.

      (iii) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que sa limite est le réel α.

   (c) Déterminer les variations de la fonction f' sur l'intervalle $\left[\dfrac{1}{2};1\right]$.

   (d) En déduire un réel $0 < q < 1$ tel que, pour tout $x \in I$, $|f'(x)| \leqslant q$.

(e) Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_{n+1} - \alpha| \leqslant q^n |u_n - \alpha|.$$

(f) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$|u_n - \alpha| \leqslant \frac{q^n}{2}.$$

(g) Justifier de nouveau que (u_n) converge vers α.

(h) i. Ecrire une fonction python `suite` prenant pour argument en entrée un entier `n` et renvoyant la valeur de u_n.

ii. Recopier et compléter la fonction python suivante afin que, prenant en argument réel `epsilon` strictement positif, elle renvoie une valeur approchée de α à `epsilon` près.

```
def valeur_approchee(epsilon):
    n=0
    while ......
        n=n+1
    return suite(n)
```

iii. En utilisant ce programme, déterminer une valeur approchée de α à 10^{-5} près.

Exercice n°2 Matrices, graphes et probabilités (Ecricome 2024)

Partie I : Matrices

Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On considère la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients diagonaux sont égaux à 0, et dont les autres coefficients sont égaux à 1 :

$$M_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

On note I_n la matrice identité d'ordre n.

1. **Etude du cas $n = 3$.**

   Dans cette question, on considère la matrice $M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calculer $(M + I_3)^2$. En déduire que M est inversible et donner M^{-1}.

   Dans les questions qui suivent, on considère la matrice $P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

   (b) Montrer que P est inversible et que :
   $$P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Dans les questions qui suivent, on pose $D = P^{-1} M P$.

   (c) Déterminer les coefficients de la matrice D.

   (d) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel k, $M^k = P D^k P^{-1}$.

   (e) Soit k un entier naturel. On admet qu'il existe deux réels a_k et b_k tels que $M^k = a_k M + b_k I_3$.
   En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminer a_k et b_k.

2. **Cas général : n est un entier naturel quelconque supérieur ou égal à 2.**

   On considère la matrice J_n carrée d'ordre n dont tous les coefficients sont égaux à 1 :
   $$J_n = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul, $(J_n)^k = n^{k-1} J_n$.

(b) Exprimer M_n en fonction de I_n et J_n.

(c) En déduire, pour tout entier naturel k non nul :

$$(M_n)^k = c_k J_n + (-1)^k I_n,$$

où :

$$c_k = \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} n^{i-1}(-1)^{k-i}.$$

(d) Montrer que, pour tout entier naturel k non nul,

$$c_k = \frac{(n-1)^k + (-1)^{k+1}}{n},$$

où c_k est le réel défini à la question précédente.

(e) En déduire, pour tout entier naturel k non nul, une expression des coefficients diagonaux et des coefficients non diagonaux de $(M_n)^k$, en fonction de n et de k.

Partie II : Graphes

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère un graphe non orienté K_n à n sommets numérotés de 1 à n, dans lequel chaque sommet est relié à chaque autre sommet par un arête et n'est pas relié à lui-même par une arête.

3. Représenter graphiquement les graphes K_2, K_3, K_4 et K_5.
4. (a) Déterminer la matrice d'adjacence du graphe K_n.

   (b) Dans le graphe K_4, combien existe-t-il de chaînes de longueur 4 menant du sommet numéro 1 à lui-même?
   On pourra utiliser le résultat de la question 2e.
5. Déterminer le degré de chaque sommet du graphe K_n.
6. Montrer que le nombre total d'arêtes du graphe est égal à $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

Partie III : Probabilités

Soit $\boxed{n \text{ un entier naturel supérieur ou égal à } 3}$ et K_n le graphe défini dans la partie II. On parcourt les sommets du graphe K_n de la façon suivante :

- Initialement, à l'étape $k = 0$, on se trouve sur le sommet numéro 1.
- A chaque étape, on change de sommet en suivant au hasard, avec équiprobabilité, l'une des arêtes issues du sommet actuel.

Pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $i \in [\![1, n]\!]$, on introduit les événements S_k^i : « après k déplacements, on se trouve sur le sommet i » et on note $s_k^i = P(S_k^i)$ la probabilité de l'événement S_k^i.

On note, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \begin{bmatrix} s_k^1 \\ s_k^2 \\ \vdots \\ s_k^n \end{bmatrix}$.

7. Donner, sans justification, X_0.
8. Soient $k \in \mathbb{N}$ et $i \in [\![1, n]\!]$. Donner, en justifiant par une phrase, les probabilités $P_{S_k^j}(S_{k+1}^i)$ en fonction de $j \in [\![1, n]\!]$.
9. En appliquant la formule des probabilités totales (vous préciserez avec quel système complet d'événements), déduire que

$$s_{k+1}^i = \frac{1}{n-1}s_k^1 + \frac{1}{n-1}s_k^2 + \ldots + \frac{1}{n-1}s_k^{i-1} + \frac{1}{n-1}s_k^{i+1} + \ldots + \frac{1}{n-1}s_k^n = \frac{1}{n-1}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} s_k^j$$

10. Déterminer la matrice A carrée d'ordre n telle que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_{k+1} = AX_k$. On exprimera A en fonction de M_n la matrice définie en partie I.
11. Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $X_k = \dfrac{1}{(n-1)^k}(M_n)^k X_0$.
12. Déterminer explicitement X_k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
13. Calculer la limite quand k tend vers l'infini de $P(S_k^i)$ en fonction de $i \in [\![1, n]\!]$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆