Travail pour les vacances de la Toussaint

Ce travail doit être considéré comme préparatoire au DS de la rentrée.
La correction sera mise en ligne dès le mardi 2 novembre pour que vous puissiez vous corriger.

Voici les points au programme du prochain DS :

- Savoir factoriser un polynôme dont on connaît une racine évidente et utiliser la factorisation pour déduire le signe du polynôme sur $\mathbb{R}$.
  Voir cours chapitre 2 et TD associé
- Propriétés des fonctions $\exp$, $\ln$ et les résolutions d'équations et d'inéquations associées.
  Voir fiche $\exp$, $\ln$ *ainsi que le TD 3*
- Résolutions d'équations faisant intervenir des racines carrées. Raisonnement par analyse-synthèse.
  Voir TP logique
- Savoir déterminer l'ensemble de définition, la dérivée, les variations, les limites, les asymptotes d'une fonction f. Connaître l'équation d'une tangente à $\mathscr{C}_f$ en un point donnée.
  Voir TP étude de fonctions
- Connaître les méthodes pour déterminer l'expression explicite d'une suite RLO2, d'une suite arithmético-géométrique.
  Voir cours chapitre 4 et TD associé
- Le raisonnement par récurrence.
  Voir cours chapitre 5 et TD associé
- Calculer une somme arithmétique, géométrique. Connaître les valeurs des sommes usuelles. Utiliser la linéarité, la relation de Chasles, le changement d'indice, les sommes télescopiques.
  Voir chapitre 5 et TD associé
- Python : Connaître la syntaxe permettant de définir une fonction, une boucle (if, for).
  Voir TP 1,2,3

Exercice n°1 Un peu de tout

Avant de chercher cet exercice, vous devez retravailler les points suivants :
- les propriétés des fonctions $\ln$ et $\exp$ (voir fiche récapitulative)
- résoudre une équation avec des racines carrées par équivalence ou analyse-synthèse (voir TP logique)
- utilisation du raisonnement par récurrence pour justifier une égalité (voir TD5 exercice n°9)
- le cours sur les sommes : sommes usuelles, utilisation de la linéarité puis les exercices n°8 et 10 du TD5

Les questions de cet exercices sont indépendantes.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Écrire l'expression suivante sous la forme $e^{g(x)}$ où $g(x)$ est à déterminer :
$$A = \frac{e^{3x+1}}{e^{(x+1)^2}} \times \left(e^{\ln\left(e^{x^2+1}\right)}\right)^2.$$
2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $\sqrt{x+3} = x+1$.
3. Montrer, **en raisonnant par récurrence sur** $\mathbb{N}$, l'égalité suivante :
$$\sum_{k=0}^{n} (5+3k) = \frac{(n+1)(3n+10)}{2}.$$
Comment peut-on montrer cette égalité **sans raisonner par récurrence** ? (Deux méthodes possibles, au moins).

Exercice n°2 Sur les suites

Avant de chercher cet exercice, vous devez retravailler les points suivants : — le cours sur les suites arithmético-géométriques puis l'exercice n°9 du TD4 — le cours sur les suites linéaires récurrentes d'ordre deux puis l'exercice n°10 du TD4

On se propose de déterminer par deux méthodes l'expression explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $u_0 = v_0 = 1$ et les relations de récurrences suivantes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \\ v_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + \frac{1}{2}v_n \end{cases}$$

Les questions 2. et 3. sont indépendantes et on n'utilisera pas le résultat de la question 2. pour la question 3.

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n + v_n = 2$.
2. Première méthode :
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ v_{n+1} = \frac{1}{6}v_n + \frac{2}{3}$.
   (b) **Python :**
   Ecrire un script Python qui demande à l'utilisateur un entier naturel n non nul et qui affiche les valeurs v_k pour $k \in [\![1; n]\!]$.
   (c) Déterminer v_n en fonction de n, puis u_n en fonction de n.
3. Deuxième méthode :
   (a) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \frac{7}{6}u_{n+1} - \frac{1}{6}u_n$.
   (b) En déduire u_n en fonction de n, puis v_n en fonction de n.

Exercice n°3 Sur les polynômes et les sommes

Avant de chercher cet exercice, vous devez retravailler les points suivants : — le cours sur les méthodes de factorisation d'un polynôme puis les exercices n°5 et n°9 du TD2 — le cours sur les sommes : linéarité, relation de Chasles puis les exercices n°9 et 10 du TD5

1. On considère le polynôme P défini, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par $P(x) = x^3 + 8x^2 + 19x + 12$.
   (a) Déterminer une racine évidente de P puis factoriser P en un produit de polynômes de degré un.
   (b) Vérifier que :
   $$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad \frac{1}{x^3 + 8x^2 + 19x + 12} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x+4} \quad \text{avec} \quad a = \frac{1}{6},\ b = -\frac{1}{2},\ c = \frac{1}{3}.$$
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par $u_n = \dfrac{1}{n^3 + 8n^2 + 19n + 12}$.
   (a) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle bien définie?
   (b) Soit $N \in \mathbb{N}$. Réécrire la somme $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} u_n$ à l'aide de la question 1.(b). Préciser la propriété utilisée.
   (c) Vérifier, à l'aide d'un changement d'indice, que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+3} = \sum_{n=2}^{N+2} \frac{1}{n+1}$ et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n+4} = \sum_{n=3}^{N+3} \frac{1}{n+1}$.
   (d) Déduire des questions précédentes que :
   $$\sum_{n=0}^{N} u_n = \frac{5}{36} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{N+2} + \frac{1}{N+3} + \frac{1}{N+4}\right).$$

Exercice n°4 Sur les fonctions

Avant de chercher cet exercice, vous devez retravailler les points suivants :

- les propriétés des fonctions $\ln$ et $\exp$ (voir fiche récapitulative) puis l'exercice n°2 du TD3
- les équations et inéquations avec $\ln$, $\exp$ puis l'exercice n°3 du TD3
- les formules de dérivation (voir fiche récapitulative) puis l'exercice n°4 du TD3

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(\sqrt{\dfrac{2+x}{2-x}}\right)$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f.

1. Déterminer l'ensemble de définition $\mathscr{D}_f$ de la fonction f.

   On admet dans la suite que f est dérivable sur $\mathscr{D}_f$

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 1$.
3. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $f(x) \geqslant 0$.
4. Déterminer, pour tout $x \in \mathscr{D}_f$, $f'(x)$.
5. Etablir le tableau de variation de f sur $\mathscr{D}_f$. Calculer les limites aux bornes de l'ensemble de définition et les interpréter en termes d'asymptotes horizontales ou verticales.
6. Déterminer l'équation de la tangente T à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0.
7. Dans un repère, tracer les asymptotes à $\mathscr{C}_f$ et T. Tracer alors l'allure de $\mathscr{C}_f$.
8. **Python**

   Ecrire une fonction Python f prenant pour argument x et qui renvoie la valeur de $f(x)$ si $x \in \mathscr{D}_f$ et la chaîne de caractère : "x n'appartient pas à $\mathscr{D}_f$" lorsque $x \notin \mathscr{D}_f$.

⋆ ⋆ ⋆ **Fin du sujet** ⋆ ⋆ ⋆